

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ****I. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ  $f'(x_0)$** 

- 1.** Να βρεθούν με τη βοήθεια του ορισμού οι παράγωγοι αριθμοί των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} f(x) = \sqrt{x+3} + 4 \text{ στο } x_0 = -3 & \text{ii)} f(x) = \sqrt[3]{x^2} \text{ και } x_0 = 0 \\ \text{iv)} f(x) = x \cdot \sqrt{x} + 3 \text{ημ } x \text{ στο } x_0 = 0 & \text{v)} f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x-1} + 1 \text{ στο } x_0 = 1 \\ \text{vi)} f(x) = \sqrt[3]{x^4} \text{ στο } x_0 = 0 & \text{vii)} f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ και } x_0 = 0 \end{array}$$

- 2.** Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$

$$\mathbf{1.} f(x) = |x-1|_x, x_0 = 1 \quad \mathbf{2.} f(x) = \frac{x|x|}{2+|x|}, x_0 = 0 \quad \mathbf{3.} f(x) = \frac{x}{1+|x|}, x_0 = 0$$

$$\mathbf{4.} f(x) = x\sqrt{|x|}, x_0 = 0 \quad \mathbf{5.} f(x) = \sqrt[3]{x^2}, x_0 = 0 \quad \mathbf{6.} f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{\pi}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

- 3.** Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$

$$\mathbf{1)} f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, x_0 = 0 \quad \mathbf{11)} f(x) = \begin{cases} x^3 e^{\frac{1}{x}}, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ x^2 e^{-\frac{1}{x}} \sigma v v \frac{1}{x}, x > 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

- 4.** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $0$  και  $|f(x)\eta \mu x - x^2| \leq x^4, \forall x \in R$ , να δειχθεί ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $0$ .

- 5.** Έστω η συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει:  $x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2$  για κάθε  $x \in R$ , δείξτε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  και να υπολογισθεί το  $f'(0)$

- 6.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $a$ ,  $f(a) = g(a)$  και  $f(x) + x^2 \leq g(x) + \alpha^2, \forall x \in R$ , να δείξετε ότι  $g'(a) - f'(a) = 2\alpha$

- 7.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση

$$g \text{ με } g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq x_0 \\ f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0), & x > x_0 \end{cases} \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0.$$

- 8.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με:  $g(x) \leq f(x) \leq g(x) + (x-1)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $g'(1) = 2$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  και να βρείτε την  $f'(1)$ .

## II. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

- 9.** Να βρείτε τα  $a, b \in \mathbb{R}$  ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ , η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x < 0 \\ ax - b, & x \geq 0 \end{cases}.$$

- 10.** Να βρεθούν οι  $a, b \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2\beta\sqrt{x+3} + 6, & x < 1 \\ x^2 + (a+b)x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$  να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$

- 11.** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $2$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3x}{x - 2} = 5$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $2$  και να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 3\sqrt{5x+6}}{x - 2}$

- 12.** Αν  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + 4xf(x)}{x^2} = -4$  να αποδείξετε ότι  $f'(0) = -2$

- 13.** Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$  και η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ , δείξτε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .

- 14.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $1$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-x)}{x-1} = 3$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $1$ .

- 15.** Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Αν  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση για την οποία ισχύει:  $g(x) = f(x) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) - f(x_0)$  να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in \mathbb{R}$

- 16.** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση με  $f^3(x) + f(x) + 1 = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$  να δείξετε ότι:  
a) η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$     b)  $f'(1) = 1$

- 17.** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  με  $f^3(x) + xf^2(x) = 2x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$  να δείξετε ότι:  $f'(0) = 1$

**III. ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ  $f'(x_0)$** 

**18.** Αν  $a \neq 0$  και η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $a$ , να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^3(x) - 2f(a)f^2(x) + 3f^2(a)f(x) - 2f^3(a)}{|x| - |a|}$$

**19.** Αν  $v \in \mathbb{Z}$  με  $v > 1$  και  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \dots + \alpha_v h^v}{h} = m$ ,

$$m \in \mathbb{R}, \text{ να αποδείξετε ότι } f'(x_0) = m - \alpha_1$$

**20.** Αν  $f(3) = 10$  και  $f'(3) = 6$ , να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(f(x))^2 - 100}{x^2 - 9}$ .

**21.** Έστω η συνάρτηση  $f$  με  $f(1) = f'(1) = 2$ . Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 4}{x^2 + x - 2} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x f(x) - 2}{\sqrt{x+3} - 2}$$

**22.** Εάν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in \mathbb{R}$ , δείξτε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x \cdot f(x_0) - x_0 \cdot f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0).$$

**23.** Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(\alpha) = f'(\alpha) = 1$  να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha \cdot f(\alpha) - x \cdot f(x)}{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}$$

**24.** Έστω η συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  και  $f(0) = 0$ ,

$$\text{δείξτε ότι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \right] = f'(0).$$

**25.** Υπάρχει ο  $f'(a)$ . Βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x f(\alpha) - \alpha f(x)}{x - \alpha}$

**26.** Υπάρχει ο  $f'(a)$ . Βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(\alpha) - \alpha^2 f(x)}{x - \alpha}$

**27.** Υπάρχει ο  $f'(a)$ . Δείξτε ότι  $f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha) - f(\alpha - x)}{2x}$

**28.** Να αποδείξετε ότι: αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε:

$$\text{i) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} = 2f'(x_0) \quad \text{ii) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 + 3h)}{h} = -4f'(x_0)$$

$$\text{iii) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x_0 - h) - f^2(x_0)}{h} = -2f(x_0)f'(x_0) \quad \text{iv) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h^2) - f(x_0)}{h} = 0$$

**29.**

Εάν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\alpha \in \mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha^2 \cdot f(x) - x^2 f(\alpha)}{x - \alpha} = \alpha^2 \cdot f'(\alpha) - 2\alpha \cdot f(\alpha)$

ii) Εάν και η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\alpha \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(\alpha) \cdot f(x) - g(x) \cdot f(\alpha)}{x - \alpha} = g(\alpha) \cdot f'(\alpha) - f(\alpha) \cdot g(\alpha)$$

#### IV. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

**30.**

Έστω συνάρτηση  $f$  για την οποία για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$f(x) - y^2 \leq f(x+y) \leq f(x) + y^2. \text{ Δείξτε ότι } \eta \text{ } f \text{ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε } x_0 \in \mathbb{R}.$$

**31.**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με την ιδιότητα  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ , για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  και  $f(0) \neq 0$ . Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $0$ , να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του  $\mathbb{R}$  και μάλιστα  $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**32.**

Οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι ορισμένες στο  $\mathbb{R}$  και ισχύουν:

i)  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

ii)  $f(x) = 1 + x \cdot g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$     iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$

Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**33.**

Εάν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει:  $f(2+h) = 1 + 2h + \eta \mu h + 3h^2$ , για κάθε  $h \in \mathbb{R}$ , να

δείξετε ότι: i)  $f(2) = 1$                       ii)  $f'(2) = 3$

**34.**

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $1$  και  $f(x)\psi = \psi f(x) + x f(\psi)$ , να αποδείξετε ότι  $f'(x) = f'(1) + \frac{f(x)}{x}$

**35.**

Αν  $f(xy) = f(y)f(x), \forall x, y \in (0, +\infty)$ ,  $f'(1) = 1/2$  τότε δείξτε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε όλο το  $(0, +\infty)$

**36.**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη σ' όλο το πεδίο ορισμού της, για την οποία ισχύει ότι:  $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$ , για κάθε  $x, y$  πραγματικούς αριθμούς και  $f'(0) = 2$

i) Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 0$  και  $f(3x) = 3e^{2x} f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε τα  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{2x}$  iii) Να βρεθεί η  $f(x)$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ****I. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΠΛΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**

**37.** Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων όπου υπάρχουν

$$1. f(x) = x\sqrt{x} \quad 2. f(x) = \frac{|x|-1}{|x|+1} + \frac{|x|+1}{|x|-1} \quad 3. f(x) = \frac{|x|}{x} \quad 4. f(x) = \sqrt{x}$$

$$5. f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \quad 6. f(x) = x^{\frac{4}{3}}$$

**38.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu x + \sigma v x, & \text{av } x < 0 \\ x^2 + x + 1, & \text{av } x \geq 0 \end{cases}$ . Να βρεθεί η  $f'(x)$ .

**39.** Άν  $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}$  και  $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$  να εξεταστεί: α)  $\text{av } f = g$  β)  $f' = g'$

**40.** Άν  $f(1) = 2$  και  $f'(1) = 5$  να βρείτε την  $g'(1)$ , όπου  $g(x) = xf(x) - \frac{x^2}{f(x)}$ .

**II. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**

**41.** Να βρείτε τις παραγωγούς των συναρτησεων

α)  $f(x) = \sqrt{x^4 \ln^2(x^3 + 3)}$  β)  $f(x) = \frac{e^{x \ln x + x^3} + 5}{\ln^3(\sqrt[4]{x^6} + 3)}$  γ)  $f(x) = \eta \mu^5 (e^{x^2} + 2x + 1)$

δ)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  ε)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  στ)  $f(x) = (\sqrt[3]{x})^2$  ζ)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

**42.** Να βρείτε τις παραγωγούς των συναρτησεων

α)  $f(x) = x^2 |x|$  β)  $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$  γ)  $f(x) = \begin{cases} x^3 \sigma v \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

**43.** Άν  $f$  δυο φορές παραγωγίσιμη να βρείτε την  $(xf(x^2))''$

**44.** Άν  $f$  δυο φορές παραγωγίσιμη να βρείτε την  $(xf(\ln x) + (\ln f'(x)))'$

**45.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $y$  με τύπο  $y(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$  επαληθεύει την εξίσωση

$$4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

**46.** Αν  $f(t) = e^{-at} \eta \mu(\omega t)$ ,  $a, \omega \in \mathbb{R}^*$  σταθερές, υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$f''(t) + 2a f'(t) + (a^2 + \omega^2)f(t)$ . (Η παράσταση αυτή είναι διάσημη στην φυσική γιατί παριστάνει την εξίσωση της φθίνουσας A.T)

**47.** Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο τιμές του  $a$  : η συνάρτηση  $y$  με τύπο  $y_a(x) = e^{ax}$  να επαληθεύει την εξίσωση  $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ . Στην συνέχεια δείξτε ότι η συνάρτηση  $g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  επαληθεύει την ίδια εξίσωση

**48.** Έστω  $f$  τρεις φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ώστε  $(f'(x))^2 + (f(x))^2 = x^4$  δείξτε ότι  $f''(0) = 0$

**49.** Να υπολογίσετε τις παραγωγούς των συναρτησεων

**α)**  $f(x) = x^x, x > 0$  **β)**  $f(x) = \left(\frac{\eta \mu x}{x}\right)^{x^2+3}$  **γ)**  $f(x) = x^{x^{e^x}}, x > 0$  **δ)**  $f(x) = (\eta \mu x)^{\sigma \nu x}, x \in (0, \pi)$

**50.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δυο φορες παραγωγίσιμη συναρτηση .να βρείτε τις συναρτησεις  $g', g''$  όταν **α)**  $g(x) = f(\eta \mu 3x) + f^2(2x)$   
**β)**  $g(x) = f^3\left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1}\right)$  **γ)**  $g(x) = e^{\sqrt{1+f^4(x)}} - x^{f(x)}, x > 0$

**51.** Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

a)  $f(x) = \eta \mu (\sigma \nu x^2) \sigma \nu (\eta \mu^2 x)$  **β)**  $f(x) = \eta \mu^4 (\ln^5 \sigma \nu e^{x^6})$  **γ)**  $f(x) = x^x, x > 0$   
**δ)**  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  **ε)**  $f(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{1+\ln^2 x}}$  **στ)**  $f(x) = \begin{cases} 3 - \sqrt{x-2} & , x \in [2, 11] \\ -3 + \sqrt{x-2} & , x \in [11, +\infty) \end{cases}$

**52.** Αν η για την παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συναρτηση  $f$  ισχυει  $f(x^6) = f^2(x^3)$  και  $f'(x) \neq 0$ , να βρεθει η τιμη  $f(1)$

**53.** Έστω δύο συναρτήσεις παρ/μες στο  $\mathbb{R}$  οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:  
 $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{e^x}$  Να αποδείξετε ότι:  $\frac{g'(x) - g(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{[f(x)]^2}$

**54.** Αν  $x = t^5 + 5t, y = 5t^3, t > 0$  βρείτε την  $\frac{dx}{dy}$

**55.** Να αποδειξετε ότι **1)**  $f(0) = f''(0) = 0$  **11)** Αν  $h(x) = f(x) \cdot f'(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$  τοτε

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f''(x)}{f'(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- 56.** Αν  $v \in \mathbb{N}^*$  και  $|a_1\eta x + a_2\eta(2x) + a_3\eta(3x) + \dots + a_v\eta(vx)| \leq |\eta x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  όπου  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_v$  σταθεροί (πραγματικοί αριθμοί), να αποδείξετε ότι:  $|a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + va_v| \leq 1$ .

- 57.** Αν η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $f(e^{x-1}) = \eta \mu(px)$ , να υπολογίσετε τις  $f'(1)$ ,  $f''(1)$

- 58.** Αν  $f(x) = x(x-1)(x-2) \dots (x-100)$ , να βρείτε την  $f'(0)$

- 59.** Αν  $f(x) = (x-\alpha)^3(x-\beta)^5$ , να δείξετε ότι  $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{x-\alpha} + \frac{5}{x-\beta}$  με  $x \neq \alpha$  και  $x \neq \beta$

- 60.** Οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο  $\Delta$ , με  $g(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in \Delta$ . Θεωρούμε την συνάρτηση  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ . Αν  $h'(x_0) = 0$  να δείξετε ότι:

$$h(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}, \quad \text{με } g(x_0) \neq 0$$

- 61.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι: I) Αν η  $f$  είναι άρτια, τότε η  $f'$  είναι περιπτή II) Αν η  $f$  είναι περιπτή, τότε η  $f'$  είναι άρτια

- 62.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και άρτια, να αποδείξετε ότι και συνάρτηση  $g(x) = f(f'(x)) - f' \left( \frac{1}{x^2-1} \right)$  είναι άρτια.

- 63.** Αν  $f, g$  δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο  $x_0$  με  $f'(x_0) \neq 0$  και για τη συνάρτηση  $G(x) = \frac{g(x)}{e^{f(x)}}$  ισχύει  $G'(x_0) = 0$  να αποδείξετε ότι  $g'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)$ .

- 64.** Να αποδειχθούν οι τύποι των νιοστών παραγώγων των παρακάτω συναρτήσεων:  
a)  $f(x) = e^{ax}$ ,  $f(v)(x) = a^v e^{ax}$  b)  $f(x) = \eta \mu(ax)$ ,  $f(v)(x) = a^v \eta \mu(ax + \frac{v\pi}{2})$

- 65.** Να βρείτε τη νιοστή παραγώγο των συναρτησεων i)  $f(x) = \eta \mu \frac{x}{2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$   
ii)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$

### III. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

- 66.** Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα  $P$  με  $P(x) = [P'(x)]^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να

βρείτε το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού  $P$  με  $P(x) - P'(x) = 2x^2 - 7x + 7$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**67.** Να βρείτε πολυώνυμο  $P(x)$  ώστε να ισχύει: α)  $(e^{-x}P(x))' = e^{-x} x(x-1)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

β) Να έχει βαθμό  $n \geq 1$  και να ισχύει  $[P'(x)]^2 = P(x)$ , με  $P(1) = 0$

γ) Να έχει βαθμό  $n \geq 1$  και να ισχύει  $P(2x) = P'(x)P''(x)$

**68.** Αν το  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , έχει δύο άνισες ρίζες  $\rho_1, \rho_2$ , να αποδείξετε ότι:

I)  $f'(\rho_1) + f'(\rho_2) = 0$     ii)  $f'(\rho_1)f'(\rho_2) \neq 0$     iii)  $\rho_1/f'(\rho_1) + \rho_2/f'(\rho_2) = 1/a$ .

**69.** Να υπολογισθούν τα αθροίσματα: I)  $A = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + vx^{v-1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $v \in \mathbb{N}^*$

ii)  $B = 2x + 4x^3 + 6x^5 + \dots + 2vx^{2v-1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $v \in \mathbb{N}^*$ .

**70.** Αν  $f(x)$  πολυώνυμο βαθμού  $n \geq 2$ , να αποδειχθεί ότι: I)  $f(x) = (x-\rho)^2 \pi(x) \Leftrightarrow$

ii) Να βρείτε τις τιμές των  $a, b \in \mathbb{R}$  για τις οποίες το πολυώνυμο  $(x-1)^2$  είνα παράγοντας του πολυωνύμου  $f(x) = ax^{n+2} - bx^{n+1} + 2$  με  $n \geq 2$ .

**71.** Έστω  $f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_v \neq 0$ ,  $a_0 \neq 0$  με ρίζες  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_v$  διάφορες ανά δύο. Να δείξετε ότι:

i)  $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\rho_1} + \frac{1}{x-\rho_2} + \dots + \frac{1}{x-\rho_v}$ ,  $x \neq \rho_i$      $i=1,2,3, \dots, v$

ii)  $f(x)f''(x) < [f'(x)]^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

iii) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \dots + \frac{1}{\rho_v}$

iv) Αν  $f(\rho_1) = f''(\rho_1) = 0$  και  $f'(\rho_1) \neq 0$  να δείξετε ότι  $\frac{1}{\rho_1 - \rho_2} + \frac{1}{\rho_1 - \rho_3} + \dots + \frac{1}{\rho_1 - \rho_v} = 0$

#### IV. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

**72.** Να αποδειχθεί ότι: I) Η συνάρτηση  $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(x) = \sin x$ , είναι Αντιστρέψιμη II) Η συνάρτηση  $f^{-1}$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(-1, 1)$  και ότι  $[f^{-1}(x)]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

**73.** Έστω μια συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ , με την ιδιότητα  $f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right) = x$ , για κάθε  $x > 0$ . Να αποδειχθεί ότι: I)  $f\left(\frac{1}{x}\right) = 1/x f'(x)$ , για κάθε  $x > 0$ .

II)  $[f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)]' = 0$ , για κάθε  $x > 0$ .

- 74.** Εστω η συναρτηση  $f(x) = \eta μx$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  να βρειτε την παραγωγο της  $f^{-1}$
- 75.** Η συναρτηση  $f: R \rightarrow R$  είναι 1-1 παραγωγισμη στο  $R$  και  $f(R) = R$  Αν για καποιο σημειο  $\alpha \in R$  ισχυει  $f'(f^{-1}(\alpha)) = 0$  Να αποδειξετε ότι η  $f^{-1}$  δεν είναι παραγωγισμη στο  $x_0 = \alpha$
- 76.** Οι συναρτησεις  $f, g$  είναι 1-1 και εχουν πεδιο τιμων το  $R$ . Αν είναι παραγωγισμες στο  $R$  και ισχυει  $f'(x) = g^{-1}(x)$ ,  $g'(x) = f^{-1}(x)$ ,  $x \in R$  Να αποδειξετε ότι  $(f \circ g + g \circ f)'(x) = x \left[ (f + g)'(x) \right]$
- 77.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 5e^x + x - 2$ . Να δειχθει ότι αντιστρέφεται και έπειτα να δειξετε a)  $f(a) \neq 0$  για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  β)  $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$  γ)  $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{6}$

**V. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ**

- 78.** Η συναρτηση  $f$  είναι παραγωγισμη στο  $(0, +\infty)$  και για κάθε  $a, b \in (0, +\infty)$  ισχυει  $f(a \cdot b) = a \cdot f(b) + b \cdot f(a)$ . Να αποδειξετε ότι 1)  $f(1) = 0$  11)  $x \cdot f'(x) - f(x) = x \cdot f'(1)$ ,  $x > 0$ .

- 79.** Αν η  $f$  είναι παραγωγισμη στο  $R$ , και ισχυει  $f(x + \psi) = e^x \cdot f(\psi) + e^\psi f(x) + x \cdot \psi + a$   $x, \psi \in R$  Να δειξετε ότι 1)  $f(0) = -a = 0$  11)  $f'(x) = f(x) + f'(0)e^x + x$

**ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ**

- 80.** Να βρεθει η εξισωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = e^x \ln(2 - e^x)$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 0$
- 81.** Στις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την εξισωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad f(x) &= (x^2 - 1) \sqrt{x}, \quad x_0 = 4 \quad \text{ii)} \quad f(x) = \frac{\eta μx}{x - x_{\text{συν}}}, \quad x_0 = \pi \quad \text{iii)} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x_0 = 1 \\ \text{iv)} \quad f(x) &= \frac{x}{e^x}, \quad x_0 = 0 \quad \text{v)} \quad f(x) = \eta μx \ln x, \quad x_0 = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

**82.**

Αν  $f(x) = x^3 - 4x$ , να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της  $C_f$  στα σημεία τομής της με τον άξονα  $x$ .

**83.**

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της  $C_f$  της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 1}$ , στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  αν  $f(x_0) + f'(x_0) = 4$

**84.**

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $f(\eta x) + f(\sigma x) = 1 + \eta x + \sigma x$  : για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$  διέρχεται από το σημείο  $B(f(1), 2)$ .

**II. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΕ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ  $\neq X_0$** 
**85.**

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^3 + x^2 + x$  που διέρχεται από το σημείο  $A(0, 1)$

**86.**

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της  $C_f$  της συνάρτησης  $f(x) = \ln x$  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

**87.**

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της  $C_f$  της  $f(x) = x^3$  που διέρχεται από το σημείο  $A(0, -16)$ .

**88.**

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της  $C_f$  της  $f(x) = \frac{x}{x+2}$ , που διέρχονται από το σημείο  $A(0, 1)$ .

**89.**

Μία συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει την ιδιότητα:  $3f(x+1) - 2f(x-2) = x^2 + 14x - 5$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . I) Να βρεθεί ο τύπος της  $f$ . II) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της  $C_f$ , οι οποίες άγονται από το σημείο  $A(1, -\frac{1}{4})$ , είναι κάθετες.

**90.**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f(\ln x) = x \cdot \ln x - x, x > 0.$$

a. Να αποδείξετε ότι η  $C_f'$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

b. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $x_0 = 0$

**91.**

Να αποδειχθεί ότι από το σημείο  $P(a, b)$  με  $b < a^2$  διέρχονται δύο εφαπτόμενες της παραβολής  $c: \psi = x^2$ . ii) Αν το  $P$  βρίσκεται πάνω στην ευθεία  $\delta: \psi = -\frac{1}{4}$ , να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες είναι κάθετες.

**92.**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  και το σημείο

$M(\lambda, f(\lambda))$ ,  $\lambda \neq 0$  της  $C_f$

- a) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $M(\lambda, f(\lambda))$
- β) Να δείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη:

  - i) Για  $\lambda=3$  δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την  $C_f$
  - ii) Για  $\lambda=1$  έχει και άλλο κοινό σημείο με την  $C_f$  το οποίο και να βρεθεί

### III. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΜΕ ΓΝΩΣΤΟ Λ

**93.**

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - x + 1$  (εφόσον υπάρχει), σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις: **α)** έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 3$ .  
**β)** σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  με τον άξονα  $x'$ .  
**γ)** είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = x + 3$ .  
**δ)** είναι κάθετη στην ευθεία  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ .  
**ε)** είναι παράλληλη στον άξονα  $x'$ .  
**στ)** είναι παράλληλη στον άξονα  $y'$ .

**94.**

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x + \ln(x-3)^2$

- i) με συντελεστή διευθύνσεως  $\lambda=3$
- ii) που σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  με τον  $x'$
- iii) που είναι κάθετη στον άξονα  $y'$

### III. ΕΥΘΕΙΑ ΝΑ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΤΗΣ $C_f$

**95.**

Να δειχθεί ότι η ευθεία  $y=3x-8$  εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x + \ln(x-3)^2$

**96.**

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη και ισχύει  $2f(x) = 1 + xf^3(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να δειχθεί ότι η ευθεία  $y=-x+2$  εφάπτεται της  $C_f$

**97.**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + \beta x + 2$  και η ευθεία  $\varepsilon$ :  $y = -x + \beta$  Να βρείτε τις τιμές του  $\beta$  για τις οποίες η ευθεία  $\varepsilon$  εφάπτεται της  $C_f$

**98.**

Αν  $0 < \alpha \neq 1$ , να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε η ευθεία  $\varepsilon$ :  $y=x$  να είναι εφαπτομένη της  $C_f$  με  $f(x) = \alpha^x$ .

### IV. ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΕ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ

**99.**

Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = f(x)\eta\mu(ax)$ ,  $a \neq 0$ , όπου  $f$  συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν  $(x_0, \psi_0)$  κοινό σημείο των  $C_f$  και  $C_g$ , να δείξετε ότι οι  $C_f$  και  $C_g$  δέχονται κοινή εφαπτόμενη στο  $(x_0, \psi_0)$ .

**100.**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g(x) = \frac{1}{x-1}$  και  $f(x) = ax^2 - \beta x + 9$ . Να βρείτε τα  $a, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε οι  $C_f$  και  $C_g$  να δέχονται κοινή εφαπτόμενη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη 2.

**101.**

Να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta, \gamma$  για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \gamma + x^x$  και  $g(x) = ax^2 + \beta x + 2$  έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο  $M(1, 2)$

**102.**

Για τις συναρτήσεις  $f, g, \varphi$  ισχύουν: Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f(x) \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$

i)  $\varphi$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

ii)  $g(x) = f(x)\varphi'(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

iii)  $[\varphi(x)]^2 + [\varphi'(x)]^2 = 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  Αν  $A(x_0, \psi_0)$  είναι κοινό σημείο των  $C_f$  και  $C_g$ , να αποδειχθεί ότι  $C_f$  και  $C_g$  έχουν κοινή εφαπτομένη

**103.**

Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \frac{1}{x}$  και

$g(x) = x^2 - x + 1$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτομένες τους είναι κάθετες

**104.**

Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $g(x) = f(x)\eta\mu 3x$ , να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $g$  έχουν εφαπτομένη σε κάθε κοινό τους σημείο

## V. ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΕ ΜΗ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ

**105.**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g(x) = 2x^2 - ax + \beta$  και  $f(x) = \frac{-3x^2 + 2x - 4}{x}$ . Να βρείτε τα  $a$   $\beta \in \mathbb{R}$ , ώστε οι  $C_f$  και  $C_g$  να διέρχονται από το ίδιο σημείο στο οποίο δέχονται κοινή εφαπτόμενη με συντελεστή διεύθυνσης 2.

**106.**

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $4(1-x)e^{2x} = 1$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ . ii) Να αποδείξετε ότι οι  $C_f$  και  $C_g$  έχουν κοινή εφαπτομένη, όπου  $f(x) = e^x$  και  $g(x) = \sqrt{x}$ .

**107.**

Αν  $f(x) = e^{-x}$  και  $g(x) = -\ln x$  και είναι  $A$  το σημείο τομής της  $C_f$  με

τον ψ'ψ και Β το σημειο τομης της  $C_g$  με τον x'x, να δειξετε ότι η ευθεια AB είναι κοινη εφαπτομενη των γραφικων παραστασεων των συναρτησεων f και g

**108.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x)=e^x$  και  $g(x)=-x^2-x$ . Να δειξετε

ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο A(0,1) εφάπτεται και στην  $C_g$

**109.** Αν  $C_f$ ,  $C_g$  είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x)=\eta mx$  και  $g(x)=x^3-3x^2+4x-1$ , να δειξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη των  $C_f$ ,  $C_g$

**110.** Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες των γρ. παραστάσεων των συναρτήσεων  $f(x)=4-x^2$  και  $g(x)=-x^2 +8x-20$ .

## VI. ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ

**111.** Αν  $f$  είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύουν:  $f'(4) = 0$  και  $(f'(x))^2 = f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , **a)** να βρεθεί ο τύπος της  $f$ . **b)** να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = -x + 1$

**112.** Η συναρτηση  $f$  είναι παραγωγισμη στο  $[0, +\infty)$  και για  $\forall x \in \mathbb{R}$  ισχυει  $f(e^{-x})=x^2+2x+3$ . Να βρειτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $A(1,f(1))$

**113.** Αν η ευθεια  $\varepsilon$ :  $\psi = 2x+1$  εφαπτεται στην παραγωγισμη

$$\text{συναρτηση } f \text{ στο } -1, \text{ να βρεθει το } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \left( f\left(\frac{x+1}{2-x}\right) + 1 \right) \cdot (x-2) \right]$$

**114.** Αν η ευθεια  $\varepsilon$ :  $\psi = 2x-4$  εφαπτεται στην  $g(x) = \ln(f(x))$  στο  $x_0 = 2$  οπου  $f$  συναρτηση με συνεχη παραγωγο να αποδειχθει ότι είναι συνεχης η  $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 f(x) - 4}{(x-2)f'(x)}, & x \neq 2 \\ 6, & x = 2 \end{cases}$

**115.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$ ,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν  $f(x) \neq 0$ ,  $g(x) = f(x)h(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οι  $f$ ,  $g$ ,  $h$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και  $h^2(x) = 1 - [h'(x)]^2$ , να δειξετε ότι οι  $C_f$  και  $C_g$  έχουν κοινή εφαπτομένη στα κοινά τους σημεία.

**116.** Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(\kappa-x) = f(\kappa+x)$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της  $C_f$  στα σημεία της  $A(\kappa-a, f(\kappa-a))$  και  $B(\kappa+a, f(\kappa+a))$  με  $\kappa \neq a$  τέμνονται πάνω στην ευθεία με

εξίσωση  $x = k$ .

- 117.** Έστω  $f$  συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία  $f'(1)=1$  και  $g$  η συνάρτηση που ορίζεται ως  $g(x)=f(x^2+x+1)-1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(1,f(1))$  εφάπτεται της  $C_g$  στο σημείο  $B(0,g(0))$ .
- 118.** Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε:  
 $f(\eta x) + f(\sigma x) = 1 + \eta x + \sigma x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$  διέρχεται από το σημείο  $B(f(1), 2)$ .

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ**

- 119.** Μια σφαιρική μπάλα αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της που ελαττώνεται δίνεται σε cm από τον τύπο  $r = 4-t^2$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας  $E$  και του όγκου  $V$  της μπάλας όταν  $t=1$  sec
- 120.** Ένα σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση  $x^2 + y^2 = 4$ . Καθώς περνάει από το σημείο  $A(-1, \sqrt{3})$ , η τετυμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 6 m/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης τη χρονική στιγμή που το σώμα περνάει από το  $A$ . Το σώμα περνάει από το  $A$  ακολουθώντας τη θετική φορά κίνησης ή όχι;
- 121.** Έστω  $x > 0$  και  $E$  το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$ , το οποίο έχει κορυφές τα σημεία  $O(0,0)$ ,  $A(4x,0)$  και  $B(0, \sqrt{x}-2)$ . Αν το  $x$  μεταβάλλεται με ρυθμό 2cm/sec, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του  $E$  όταν  $x = 9$  cm.
- 122.** Η περίμετρος μιας κυκλικής κηλίδας μεταβάλλεται με ρυθμό 2m/sec όταν η ακτίνα της είναι 12m. Να βρεθεί την ίδια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της
- 123.** Ένα σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση  $x^2 + \psi^2 = \rho^2$  με  $\frac{\partial x}{\partial t} = \psi$ . Βρείτε το  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  όταν  $\psi \neq 0$ . Το σώμα κινείται στον κύκλο κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή αντίθετα;
- 124.** Ένα σημείο  $A$  κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - 2x$ .

Τη χρονική στιγμή  $t_0$  βρίσκεται στη θέση (2,0) και το  $x$  αυξάνει με ρυθμό

3 cm/sec.i) Να βρεθεί το  $\psi'(t)$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ .

Να βρείτε σε ποια θέση  $\psi'(t) = x'(t) \neq 0$ , όπου  $\psi = f(x)$ .

- 125.** Ένας πληθυσμός μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση  $N(t) = \frac{40}{1+19.2^{-t}}$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε λεπτά. Αν οι φυσιολογικές απώλειες  $M(t) = N'(t)$  κάθε λεπτό είναι ανάλογες του τετραγώνου του υπάρχοντος πληθυσμού με συντελεστή  $k = 10^{-3}$ , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής  $M$ .

- 126.** Ένας άνθρωπος ύψους 170cm κινείται προς μια φωτεινή πηγή που απέχει από το έδαφος 300cm. Αν η ταχύτητα του ανθρώπου είναι 7,2Km/h να βρεθεί με τι ταχύτητα κινείται η σκιά του κεφαλιού του

- 127.** Το εμβαδόν της περιοχής ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κύκλους είναι πάντα  $9\pi \text{ cm}^2$ . Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του μεγαλύτερου κύκλου είναι  $10\pi \text{ cm}^2/\text{sec}$ . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του μήκους του μικρού κύκλου όταν αυτός έχει εμβαδόν  $16\pi \text{ cm}^2$ .

- 128.** Μια σκάλα μήκους 13m είναι ακουμπισμένη σ' έναν κατακόρυφο τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας έλκεται από τον τοίχο με ρυθμό 2m/sec. Να βρείτε:  
 i. Πόσο γρήγορα γλιστράει το πάνω άκρο της σκάλας όταν το κάτω άκρο απέχει από τον τοίχο 5m.  
 ii. Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου που σχηματίζει η σκάλα με τον τοίχο και το έδαφος όταν το κάτω άκρο της απέχει από τον τοίχο 12m.

- 129.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x$ ,  $x > 0$  και το σημείο  $M(a, \ln a)$ ,  $a > 0$ .  
 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $M$ . Για ποια τιμή του  $a$  η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων;  
 Αν το σημείο  $M$  απομακρύνεται από τον άξονα  $y$  με σταθερή ταχύτητα  $v = 2\text{m/sec}$ , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου  $M$  ως προς το χρόνο  $t$  τη χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία η εφαπτομένη στο  $M$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- 130.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3$ , και το σημείο  $M(a, a^3)$ ,  $a > 0$ , που απομακρύνεται από τον άξονα  $y$  με σταθερή ταχύτητα  $v = 3 \text{ m/sec}$ .  
 i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $M$ .  
 ii) Να αποδειχθεί ότι η παραπάνω εφαπτόμενη τέμνει τη  $C_f$  και σε δεύτερο σημείο  $N$ .

- iii)** Να εκφραστεί το εμβαδόν του ορθογωνίου AMBN (με διαγώνιο MN και πλευρές παράλληλες προς τους άξονες) με μεταβλητή το a.
- iv)** Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t<sub>0</sub> κατά την οποία το Μαπέχει από τον άξονα y' y απόσταση 2m.

**KANONEΣ De L'Hospital****ΑΣΚΗΣΕΙΣ****I. ΜΟΡΦΗ  $\frac{0}{0}$** **131.** Να υπολογιστεί τα ορια

$$\text{ι)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\eta\chi + x \ln(1+x)}{\eta\mu^2\chi} \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2} - \eta\mu\chi - \sigma\nu\chi}{\ln(\eta\mu 2\chi)} \quad \text{iii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{1 - \sigma\nu\chi} \quad \text{iv)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu\chi}$$

**132.** Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2\sigma\nu\chi x - 2} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{e^x - ex} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\eta\mu x - \sigma\nu\chi x + 1}{x^2} \quad \varepsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\ln x}$$

**II. ΜΟΡΦΗ  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$** **133.** Να υπολογιστεί τα ορια

$$\text{ι)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\chi^3}{e^x} \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{e^x}} \quad \text{iii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}, \alpha > 0, \beta > 0 \quad \text{iv)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

**134.** Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{\ln(\sqrt{x} + 2)} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\kappa} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + \eta\mu x}{e^x + x + 2}$$

**II. ΜΟΡΦΗ  $0 \cdot (\pm\infty)$** **135.** Να υπολογιστεί τα ορια

$$\text{ι)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \chi \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow 1} [\ln x \cdot \ln(1-x)] \quad \text{iii)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x \cdot \eta\mu\chi)$$

**136.** Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln^3 x)$  β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} \right)$  γ)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu^{12} x \ln x)$

**III. ΜΟΡΦΗ  $(\pm\infty) - (\pm\infty)$**

**137.** Να υπολογισετε τα ορια

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sigma \phi \chi - \frac{1}{\chi} \right)$  ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x)$  iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\eta \mu^2 \chi} - \frac{1}{\chi^2} \right)$  iv)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\chi} - \frac{1}{2^x - 1} \right)$

**138.** Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$  β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x - e^x)$  γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sigma v \nu^2 x}{x} - \frac{e^x}{\eta \mu x} \right)$

**IV. ΜΟΡΦΕΣ  $0^0, 1^\infty, (\infty)^0$**

**139.** Να υπολογισετε τα ορια

i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu \chi)^{\eta \mu \chi}$  ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \chi^x$  iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \chi^{\frac{1}{\chi-1}} \right]$  iv)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\chi+3}{\chi-3} \right)^{\chi^2}$  v)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta \mu 3 \chi + \sigma v \nu 2 \chi)^{\frac{3}{\chi}}$

**ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ**

**140.** Δινεται η συναρτηση  $g(x) = \begin{cases} \frac{xf(x)}{\eta \mu^2 \chi}, & 0 < \chi < \pi \\ 0, & \chi \leq 0 \end{cases}$  οπου  $f$  μια παραγωγισμη στο  $R$

συναρτηση με  $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$ . Να δειξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγισμη και να βρειτε την  $g'$

**141.** Η συναρτηση  $f$  είναι παραγωγισμη στο  $R$  και ισχυει  $f(0)=0$ . Να αποδειξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(-x)}{e^x - 1} = 2f'(0)$

**142.** Η συναρτηση  $f$  δυο είναι φορες παραγωγισμη στο  $R$  και η  $f''$  είναι συνεχης στο  $x=0$ . Αν  $f(0)=f'(0)=0$  και  $f''(0) \neq 0$ , να αποδειξετε

ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu \chi^2 + f(x)}{(e^x - 1)f'(x)} = 1$  αν και μονο αν  $f''(0) = 2$

**143.** Δινεται η συναρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \ln x + x - 1}{1-x}, & 0 < x \neq 1 \\ -2, & x = 1 \end{cases}$  Να δειξετε ότι η  $f$  είναι

συνεχης και  $f'(1) = -\frac{1}{2}$

**144.** Δινεται η συναρτηση  $f(x) = \begin{cases} (1-e^{-x^2}) \ln x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  **i)** Να υπολογισετε τα ορια

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x^2)$  **ii)** Να αποδειξετε ότι η  $f$  είναι συνεχης στο  $x=0$ . **iii)** Να βρειτε την εξισωση της εφαππομενης της γραφικης παραστασης της  $f$  στο σημειο  $O(0,0)$

**145.** Η συναρτηση  $f$  είναι παραγωγισιμη στο  $x_0 = 0$  και  $f(0) = 0$ . Να αποδειξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = 1$

**146.** Η συναρτηση  $f : R \rightarrow R$  είναι παραγωγισιμη με  $f(x) \geq \varphi > 0$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = l \in R$ . Να δειξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

**147.** Αν η συναρτηση  $f$  εχει δευτερη παραγωγο στο  $a$  και  $f''(a) \neq 0$ , να αποδειξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{1}{(x-a)f(a)} - \frac{1}{f(x)-f(a)} \right] = \frac{f''(a)}{2f^2(a)}$

**148.** Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'''(x)}{xf''(x)} = 1$  να δειξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + f(x)}{xf'(x)} = 0$

**149.** Έστω μια συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $xf(x) + e^{\eta x} = f(x)e^{\eta x} + e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε την  $f(0)$ .

**150.** Έστω μια συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $(1-\sin x)f(x) = \ln(1+x) - x$  για κάθε  $x > -1$ . Να βρείτε την  $f(0)$ .

**151.** i) Να λύσετε την εξίσωση  $1+\ln x = x$  στο  $(0,2)$ .  
ii) Να βρείτε την εφαππομένη της  $C_f$  με  $f(x) = x \ln x + x + 2$ ,  $x \in (0,2)$  που διέρχεται από τα ο σημείο  $A(2,5)$  και το  $f(0,2)$ .

**152.** Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι δύο φορές παραγωγισιμη. Να αποδειξετε ότι:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 3f(x) + 2f(x-h)}{h^2} = 3f''(x)$ .

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

## I. ΑΜΕΣΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

- 153.** Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τις παρακάτω συναρτήσεις στο αντίστοιχο διάστημα α)  $f(x)=2x^3+x^2-8x+1$ ,  $x \in [-2,2]$   
 β)  $f(x)=\eta \mu 2x+\sin 2x-1$ ,  $x \in [0,\pi]$  γ)  $f(x)=x^2-4x+|x-2|+3$ ,  $x \in [1,3]$

- 154.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9x^2 - 14x + 9}, & \text{αν } x \leq 1 \\ x+1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ . Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται τα Θ. ROLLE στο διάστημα  $[0,2]$  για τη συνάρτηση  $f$ .

- 155.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \eta \mu x, & \text{αν } x \leq 0 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ . Να βρείτε τις τιμές  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. ROLLE στο διάστημα  $[-\pi, 1]$  και έπειτα να βρείτε όλα  $x_0 \in (-\pi, 1)$  για τα οποία ισχύει  $f'(x_0) = 0$ .

- 156.** Δίνεται η συναρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 0 \\ x^3 + (\beta - 1)x, & x > 0 \end{cases}$  Να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε να εφαρμόζεται για την  $f$  το θεώρημα Rolle στο  $[-1, 1]$

- 157.** Να αποδείξετε ότι: **i)** Η συνάρτηση  $f(x) = x \sin x$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. ROLLE στο διάστημα  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  **ii)** Η εξίσωση  $x \sin x = 1$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

- 158.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση για την οποία ισχύουν: Είναι συνεχής στο  $[a, b]$   
 Είναι παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  και  $f(a) = f(b) = 0$  Να αποδείξετε ότι:  
 a) Για τη συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{x - c}$  όπου  $c \notin [a, b]$  εφαρμόζεται το Θ. ROLLE στο διάστημα  $[a, b]$ . b) Άν  $c \notin [a, b]$ , τότε υπάρχει  $c_0 \in (a, b)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $(c_0, f(c_0))$  να διέρχεται από το σημείο  $(c, 0)$ .

- 159.** Δίνεται η συναρτηση  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι συνεχής στο  $[a, b]$  και παραγωγισμή στο  $(a, b)$ . Να αποδείξετε ότι : **I**) για τη συναρτηση  $g(x) = e^{f(x)}(x - a)(x - b)$  εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο  $[a, b]$   
**ii)** Υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = \frac{1}{a - \xi} + \frac{1}{b - \xi}$

**160.**

Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες: Είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα  $[a, \beta]$   $f(a) = f(\beta) = 0$  και  $f(x) \neq 0$   $x \in (a, \beta)$ . Να αποδείξετε ότι: a) Για τη συνάρτηση  $h(x) = f(x)e^{-g(x)}$ ,  $x \in [a, \beta]$  εφαρμόζεται το Θ. ROLLE στο διάστημα  $[a, \beta]$ . b) Υπάρχει  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_g$  στο σημείο της  $A(x_0, g(x_0))$  να είναι παράλληλη προς την ευθεία  $\delta$ :  $f'(x_0).x - f(x_0).\psi + \kappa = 0$ .

**161.**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^\nu (x-1)^\mu$  με  $\nu, \mu \in \mathbb{N}^*$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 0$  και το σημείο  $\Gamma(x_0, 0)$  ώστε  $\mu \overrightarrow{AM} = \nu \overrightarrow{MB}$  όπου  $A(0, 0)$  και  $B(1, 0)$ .

**162.**

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[a, \gamma]$  και ισχύουν  $f(a) = f(\gamma)$  και  $f'(a) = f'(\gamma) = 0$ , να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία  $x_1, x_2 \in (a, \gamma)$  τέτοια, ώστε  $f''(x_1) = f''(x_2)$ .

**163.**

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$  και  $0 \notin [a, \beta]$ , Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε:  $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta^2 - \alpha^2} = \frac{f'(x_0)}{2x_0}$ .

**164.**

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $[a, \beta]$ , παραγωγίσιμες στο  $(a, \beta)$  με  $f(a) = f(\beta)e^{g(\beta)-g(a)}$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε:  $f'(x_0) + f(x_0).g'(x_0) = 0$ .

**165.**

Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $R$  και ισχύει  $10f(x) \leq 6f(5) + 4f(3)$  για κάθε  $x$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi$  με  $f'(\xi) = 0$ .

**166.**

Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[2, 3]$  και  $f(3) - f(2) = \ln 3 - \ln 2$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (2, 3)$ , ώστε  $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$ .

**167.**

Σ' έναν αγώνα δρόμου δύο αθλητές τερματίζουν με την ίδια ταχύτητα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια του αγώνα που έχουν την ίδια επιτάχυνση

**168.**

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$ . Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε:  $f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{\beta - x_0}$ .

**169.**

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 2]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, 2)$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, 2)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = f'(2-\xi)$ .

**170.**

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$  και  $f(a) - f(\beta) = \alpha^2 - \beta^2$ . Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε:  $f'(x_0) = 2x_0$ .

**171.**

Η συνάρτηση  $f: [1, 4] \rightarrow R$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν  $f(1) = 2$

και  $f(4) = 8$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της  $C_f$  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

**172.** Δίνεται η συναρτηση  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής στο  $[a,b]$ , παραγωγισμη στο  $(a,b)$

Αν  $f(x) \neq 0$  να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\theta \in (a,b)$  τετοιο, ωστε  $\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{1}{a-\theta} + \frac{1}{b-\theta}$

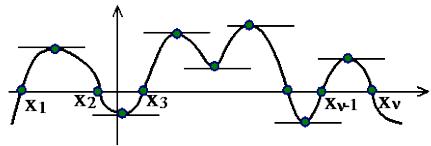
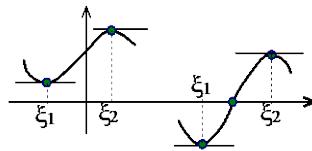
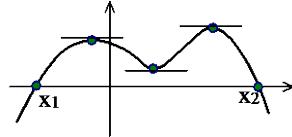
**173.** (Για παραγωγίσμες συναρτήσεις)

α) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών  $x_1, x_2$  της συνάρτησης  $f$  υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της παραγώγου  $f'$

β) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών  $\xi_1, \xi_2$  της παραγώγου  $f'$  υπάρχει

το πολύ μία ρίζα της συνάρτησης  $f$

γ) Αν η  $f$  έχει  $n$  ρίζες  $x_1, x_2, \dots, x_n$  τότε η  $f'$  έχει  $n-1$  τουλάχιστον ρίζες



## II. ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE ΚΑΙ ΡΙΖΕΣ

### Ορισμός:

**Παράγουσα (ή αρχική) της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$ :** Λέγεται κάθε συνάρτηση  $F$  που είναι παραγωγίσμη στο  $\Delta$  και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

### ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ

| συνάρτηση $f$        | παράγουσα $F$         | μορφή συνάρτησης $f$        | μορφή παράγουσας $F$       |
|----------------------|-----------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 0                    | $c$                   | $f'(x)$                     | $f(x)$                     |
| 1                    | $x$                   | $f(x) f'(x)$                | $\frac{1}{2} f^2(x)$       |
| $x^a$                | $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ | $f^a(x) f'(x)$              | $\frac{1}{a+1} f^{a+1}(x)$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$           | $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ | $2\sqrt{f(x)}$             |

| ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ                              |                     | 9ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ                   |                        |
|--|---------------------|--------------------------------------|------------------------|
| ημx                                    | -συνx               | ημf(x) f'(x)                         | -συνf(x)               |
| συνx                                   | ημx                 | συνf(x) f'(x)                        | ημf(x)                 |
| e <sup>x</sup>                         | e <sup>x</sup>      | e <sup>f(x)</sup> f'(x)              | e <sup>f(x)</sup>      |
| $\frac{1}{x}$                          | ln x                | $\frac{f'(x)}{f(x)}$                 | ln f(x)                |
| a <sup>x</sup>                         | $\frac{a^x}{lna}$   | a <sup>f(x)</sup> f'(x)              | $\frac{a^{f(x)}}{lna}$ |
| και κάποιες γενικότερες μορφές         |                     |                                      |                        |
| μορφή συνάρτησης f                     | μορφή παράγουσας F  | μορφή συνάρτησης f                   | μορφή παράγουσας F     |
| f'(x)g(x) + f(x)g'(x)                  | f(x)g(x)            | f'(x) + x f'(x)                      | x f(x)                 |
| $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ | $\frac{f(x)}{g(x)}$ | $\frac{f(x) - xf'(x)}{x^2}$          | $\frac{f(x)}{x}$       |
| [f'(x)] <sup>2</sup> + f(x) f''(x)     | f(x) f'(x)          | [f'(x) + f(x)g'(x)]e <sup>g(x)</sup> | f(x)e <sup>g(x)</sup>  |

**174.** Av  $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$   $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$   $\alpha \neq 0$ . Na δειχθεί ότι η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  δέχεται στο διάστημα (0, 1) τουλάχιστον μια ρίζα.

**175.** Na δειχθεί ότι η εξίσωση  $\etaμx + (x-1) συνx = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1)

**176.** Av  $\frac{\alpha_v}{v+1} + \frac{\alpha_{v-1}}{v} + \dots + \frac{\alpha_2}{3} + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_0}{1} = 0$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$ , na αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ , έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

**177.** Na δειχθεί ότι η εξίσωση  $8\alpha x^3 + 9\beta x^2 - 6\beta x - 2\alpha = 0$  έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0, 1)

**178.** Na δειχθεί ότι η εξίσωση  $(x^2 - 4)συνx + 2xημx = 0$  έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα (-2, 2)

**179.** Έστω f συνεχής στο  $[a, b]$ ,  $a > 0$  και παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  για την οποία είναι  $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$  a) Na δείξετε ότι η εξίσωση  $xf'(x) = f(x)$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(a, b)$  β) Na δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της  $C_f$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων

**180.** Na δειχθεί ότι μεταξύ δυο οινοδήποτε ριζών της  $e^x$  ημx=1, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της  $e^x$  συνx= -1

- 181.** Να δειχθεί ότι μεταξύ δυο ριζών της εξίσωσης  $e^{4x+x^2} = 2\eta μx$  υπάρχει πάντα μια ρίζα της εξίσωσης  $2x + 4 = 0$

► **Υπαρξη το πολύ ν ριζών εξίσωσης (με άτοπο)**

- 182.** Δείξτε ότι η εξίσωση  $x^3 - 3x + a = 0$  έχει το πολύ μια ρίζα στο  $(-1, 1)$
- 183.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $x^{2v} + ax + b = 0$  έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες
- 184.** Δίνεται η συναρτηση  $f : R \rightarrow R$  δυο φορές παραγωγισμή στο  $R$  με  $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in R$ . Να αποδειξτε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει το πολύ δυο ρίζες.
- 185.** Αν  $a \neq 0$ , να αποδείξτε ότι η εξίσωση  $x^4 + ax^3 + a^2x^2 + bx + c = 0$  έχει το πολύ δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.
- 186.** Να αποδείξτε ότι η εξίσωση  $4x^3 + 18x + \mu = 21x^2$  έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα στο διάστημα  $(1, 2)$ .
- 187.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + \mu$ , όπου η παράμετρος  $\mu \in R$ . Να αποδείξτε ότι η εξίσωση έχει το πολύ δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.
- 188.** Να αποδείξτε ότι η εξίσωση  $ax^3 + bx^2 + cx + d = e^x$  έχει το πολύ τέσσερις πραγματικές ρίζες.
- 189.** Να αποδείξτε ότι η εξίσωση  $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \lambda x + \mu = 0$  έχει το πολύ δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε  $\lambda, \mu \in R$ .
- 190.** Να δείξτε ότι η εξίσωση  $x^2 - 2x + 2\ln(x+1) = 0$  έχει το πολύ μία ρίζα

► **Υπαρξη ακριβώς ν ριζών εξίσωσης**

- 191.** Να δειχθεί ότι η εξίσωση  $x^4 - x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$  με  $a, b \in R$  και  $b < 0$  έχει δύο μόνο ρίζες άνισες
- 192.** I) Αν ο ν είναι άρτιος θετικός ακέραιος και  $a \neq 0$ , να αποδείξτε ότι η εξίσωση  $(x+a)^n = x^n + a^n$  έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

II) Να λυθεί η εξίσωση:  $(x+3)^{1996} = (x+1)^{1996} + 16^{499}$ .

**193.** Αν η εξίσωση  $x^4 + ax^3 + 3\beta x^2 + gx + \delta = 0$  έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές και άνισες μεταξύ τους, να αποδείξετε ότι  $a^2 > 8\beta$

**194.** Δίνεται το πολυώνυμο  $\Pi(x) = (2x-1)(2x+1)(x^2-3x)$ . Να αποδείξετε ότι τι πολυώνυμο  $\Pi'(x) = 0$ , έχει τρεις ρίζες ανά δύο διαφορετικές

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ Θ.Μ.Τ

#### I. ΑΜΕΣΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ Θ.Μ.Τ

**195.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$ . Να εξετάσετε αν η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα  $[-3,2]$  και αν ναι, να βρείτε όλα τα  $\xi \in (-3,2)$  που να επαληθεύουν το Θ.Μ.Τ.

**196.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x(1-\ln x)$ . Να εξετάσετε αν η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα  $[1,e]$  και αν ναι, να βρείτε όλα τα  $\xi \in (1,e)$  που να επαληθεύουν το Θ.Μ.Τ.

**197.** Έστω η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[a,b]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a,b)$  με  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in [a,b]$ . Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο  $[a,b]$  για τη συνάρτηση  $f(x) = \ln f(x)$ , να αποδειχθεί ότι υπάρχει  $\xi \in (a,b)$  τέτοιο ώστε:  $f(a) = f(b)e^{\frac{(a-b)f'(\xi)}{f(\xi)}}$

#### II. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕ Θ.Μ.Τ

**198.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[1,3]$  με  $f(1) = 2005$  και  $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$  για κάθε  $x \in (1,3)$ , να αποδείξετε ότι  $2004 \leq f(3) \leq 2006$ .

**199.** Αν η συνάρτηση  $f'(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $R$  και είναι  $f(0) = 0$ , να αποδείξετε ότι:  $f'(1) < f(1) < f'(0)$ .

**200.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[1,5]$  με  $f(1) = -2$  και  $|f'(x)| < 2$  για κάθε  $x \in (1,5)$ , να αποδείξετε ότι:  $-10 < f(5) < 6$ .

**201.** α) Αν  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $[a, \beta]$  να δείξετε:  $f'(a) < \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} < f'(\beta)$

β) Αν  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $[a, +\infty)$  να δείξετε:  $f'(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(x)$

**202.** Να αποδειχθούν οι ανισότητες :

α)  $e^a < \frac{e^\beta - e^a}{\beta - a} < e^\beta$ , για κάθε  $a, \beta \in \mathbb{R}$  με  $a < \beta$

β)  $x+1 \leq e^x \leq xe^x + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

γ)  $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$ , για κάθε  $x > -1$  και  $x \neq 0$ . Στη συνέχεια να δείξετε:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ , ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^3} = 0$

δ)  $|\eta\mu\beta - \eta\mu a| \leq |\beta - a|$  για κάθε  $a, \beta \in \mathbb{R}$

**203.** Αν  $0 < a < \beta$ , να αποδειχθεί:  $e^\beta - e^a < \beta e^\beta - a e^a$ .

**204.** Να αποδείξετε ότι:  $\left| \ln \frac{x^2 + 1}{\psi^2 + 1} \right| \leq |x - \psi|$ , για κάθε  $x, \psi \in \mathbb{R}$ .

**205.** Αν ισχύουν  $a < \gamma < \beta$ , και  $f'(\gamma) = 0$  και  $|f''(x)| \leq \theta$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ , να αποδείξετε ότι  $|f'(\alpha) + f'(\beta)| \leq \theta(\beta - \alpha)$ .

**206.** Να αποδείξετε ότι: i)  $\sigma\phi\beta < \frac{\ln(\eta\mu\beta) - \ln(\eta\mu a)}{\beta - a} < \sigma\phi\alpha$ , αν  $0 < a < \beta < \frac{\pi}{2}$ .

ii)  $|\eta\mu^2\beta - \eta\mu^2a| \leq |\beta - a|$ . iii)  $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$ , αν  $x > 0$ .

iv)  $1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$ , αν  $-1 < x < 0$ . v)  $x \leq e^{x-1} \leq 1 + (x-1)e$ , αν  $x \in (1, 2)$ .

Θ.Μ.Τ και ROLLE

**207.** Αν η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και υπάρχουν

τρία συνευθειακά σημεία της γραφικής παράστασης  $C_f$ , να δείξετε ότι:

i) Υπάρχουν δύο σημεία της  $C_f$  στα οποία οι εφαπτόμενες είναι μεταξύ τους παράλληλες ii) Υπάρχει  $\xi \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $f''(\xi) = 0$

iii) Εξετάστε αν εφαρμόζεται το θ. Rolle για την συνάρτηση  $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

στο διάστημα  $[\beta, \gamma]$  και να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (\beta, \gamma)$  με  $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(\alpha)}{\xi - \alpha}$

- 208.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Αν οι αριθμοί  $f(2), f(4), f(6)$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (2, 6)$  τέτοιο ώστε  $f''(\xi) = 0$ .
- 209.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  της οποίας η παράγωγος  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ . Αν οι αριθμοί  $a, b, c, d$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με  $a < b < c < d$ , να αποδείξετε ότι:  $f(a) + f(d) < f(b) + f(c)$ .
- 210.** Η συναρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[-3, 3]$  δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $(-3, 3)$  με  $f(0) = f(3) + f(-3)$ . Να δειχθεί ότι υπάρχει  $\xi \in (-3, 3)$  ώστε  $f''(\xi) = 0$
- 211.** Με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. να λύσετε την εξίσωση:  $3^x + 6^x = 5^x + 4^x$ .
- 212.** Έστω η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$
- a) Αν η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(a, b)$  να δείξετε ότι
- $$f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < \frac{f(a)+f(\beta)}{2}$$
- b) Αν η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(a, b)$  να δείξετε ότι
- $$f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) > \frac{f(a)+f(\beta)}{2}$$
- c) Αν  $f'(x) \leq 1$  για κάθε  $x \in (a, b)$ ,  $f(a) = a$  και  $f(b) = b$  να δείξετε ότι
- $$f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) = \frac{a+\beta}{2} \quad (\text{ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ JENSEN})$$
- 213.** Έστω  $a > 0$  και η δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[-a, a]$  συνάρτηση  $g$ . Αν  $2g(0) = g(a) + g(-a)$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (-a, a)$  τέτοιο, ώστε:  $g''(\xi) = 0$ .
- 214.** Η συνάρτηση  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  και συνεχής με  $f(a) = f(b) = 0$ . Να αποδείξετε ότι:
- i) αν υπάρχει  $x_0 \in (a, b)$  με  $f(x_0) > 0$ , τότε υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  τέτοιο, ώστε  $f''(\xi) < 0$ ,
  - ii) αν υπάρχει  $x_0 \in (a, b)$  με  $f(x_0) < 0$ , τότε υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  τέτοιο, ώστε  $f''(\xi) > 0$ .

- 215.** Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $f(\ln a) = f(\ln \beta)$ . Αν ισχύει  $\ln a < \ln \gamma < \ln \beta$ , με  $a, \beta, \gamma > 0$  και  $\frac{\gamma}{a} = \frac{\beta}{\gamma} = e^2$ , να

**IV. Θ.Μ.Τ KAI BOLZANO**

- 216.** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  και  $f(a) = a$ ,  $f(b) = b$   $a \neq b$  να δείξετε ότι: a) Υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) = a + b - \xi$   
β) Υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$  με  $\xi_1 \neq \xi_2$  τέτοια ώστε  $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 1$

- 217.** Έστω συνεχής  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (0, 2)$  Να δείξετε ότι:  
a)  $f(0) \neq f(2)$  β) Υπάρχει  $x_0 \in (0, 2)$  με  $5f(x_0) = 2f(0) + 3f(2)$   
γ) Υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2, \xi \in (a, b)$  τέτοια ώστε  $\frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = \frac{5}{f'(\xi)}$

- 218.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[0, 1]$ , με  $f(0) = 0$  και  $f(1) = 1$ , να αποδείξετε ότι: i) υπάρχει  $\gamma \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε:  $f(\gamma) = \frac{1}{2}$   
ii) υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$  τέτοια, ώστε:  $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$ .

- 219.** Αν  $\exists f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$  και η  $f$  είναι γνήσια μονότονη δείξτε ότι : Υπάρχουν  $f(c) - f(a) = 2k$  μοναδικά  $c, d \in (a, b)$  και πραγματικός αριθμός  $k$  :  $f(d) - f(c) = k$   
 $f(b) - f(d) = 3k$

Στην συνέχεια δείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί  $\xi_1, \xi_2$  και  $\xi_3$  στο  $(a, b)$  :

$$\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} + \frac{3}{f'(\xi_3)} = \frac{6(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

**V. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ**  
 **$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \dots + f'(\xi_v) = c$**

- 220.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, 2]$ , παραγωγίσιμη στο  $(0, 2)$  με  $f(0) = f(2)$ , να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία  $a, \beta \in (0, 2)$  τέτοια ώστε:  $f'(a) + f'(\beta) = 0$ . Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα.

- 221.** Έστω συναρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $[1, 4]$  με  $f(4x) = 4f(x)$  και  $f\left(\frac{1}{4}\right) = 2$ . Να δειχθεί ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1, 4)$  ώστε  $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 24$

**VI. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ**  
 $\kappa_1 f'(\xi_1) + \kappa_2 f'(\xi_2) + \dots + \kappa_v f'(\xi_v) = c$

- 222.** Έστω  $f$  συνεχής στο  $[a,b]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a,b)$  και  $f(a)=f(b)$ . Δείξτε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2$  στο  $(a,b)$  :  $f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)=0$ . Εξηγείστε γεωμετρικά
- 223.** Έστω  $f$  συνεχής στο  $[a,b]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a,b)$ ,  $f(a)=f(b)$  και  $k, l, m > 0$ . Δείξτε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  στο  $(a,b)$  :  $k f'(\xi_1)+l f'(\xi_2)+m f'(\xi_3)=0$ .

**ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ - ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**I. ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

- 224.** Για τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύουν:  $f(0) = a$  και  $f'(x) = af(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $a \neq 0$ . Να δειχθεί ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x) f(-x)$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$  και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της.
- 225.** Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f'(x) = -g^2(x)$  και  $g'(x) = f^2(x), \in \mathbb{R}$
- a) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση  $h(x) = f^3(x) + g^3(x)$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$
- β) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης  $h$  αν  $f(0) = 1$  και  $g(0) = 2$
- 226.** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη με  $f'(x) = 2f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  για την οποία  $f(0) = 1$  και  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x$ . Να δειχθεί ότι:
- α) Η συνάρτηση  $G(x) = \ln f(x) - 2x$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$
- β)  $f(x) = e^{2x}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- 227.** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία  $f(x) + f''(x) = 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  a) Αν  $f(0) = f'(0) = 0$  να δειχθεί ότι:
- I) συνάρτηση  $h = (f')^2 + f^2$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$  ii)  $f(x) = 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- β) Αν  $g(x) + g''(x) = 0$  με  $g(0) = 0, g'(0) = 1$  να δειχθεί ότι  $g(x) = \eta x$

**228.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  με  $f(x) + f'(x) = g(x) + g'(x)$  και οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $g$  έχουν σε κοινό τους σημείο κοινή εφαπτόμενη, να αποδείξετε ότι  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**229.** Δίνεται η τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $2f(x) = x(1 + f'(x))$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f'$  είναι σταθερή

**230.** Υποθέτουμε  $|f(x) - f(\psi)| \leq (x - \psi)^v$  για κάθε  $x, \psi \in \mathbb{R}$ , όπου  $v$  άρτιος θετικός ακέραιος. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι σταθερή

**231.** Άν  $f'(x) = -f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(0) = 1$ , και  $f'(0) = 0$ , να αποδείξετε ότι:  $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = 1$ , η συνάρτηση  $h(x) = f(x) - \sin x$  ικανοποιεί την ισότητα  $(h(x))^2 + (h'(x))^2 = 0$ , Να δειξετε ότι  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

## II. ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**232.** Να βρεθεί η συνάρτηση  $f$  όταν:

a)  $f'(x) = 3\sin x - 4\eta \mu 2x - e^{-x}$  και  $f(0) = 5$       b)  $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$  και  $f(0) = 1$

γ)  $f'(x) = 2x \sin x - x^2 \eta \mu x$  και  $f(0) = 1$       δ)  $xf'(x) + f(x) = 2$ ,  $x > 0$  και  $f(1) = 0$

ε)  $f$  συνεχής στο  $[0, \frac{\pi}{2}]$  και  $f'(x)$ - σφώ  $f(x) = \eta \mu x$  με  $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{2009}{2} + \frac{\pi}{12}$

στ)  $f'(x) = 2f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , με  $f(0) = 1$

**233.** Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  στο  $(0, +\infty)$  με  $f(x) > 0$  ισχύουν:

i) Η κλίση της εφαπτομένης σε κάθε σημείο της γραφικής παράστασης είναι ανάλογη με το πηλίκο  $\frac{x}{f(x)}$

ii) Η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(1, 1)$  iii) Η εφαπτομένη στο  $A$  έχει κλίση ίση με 1. Να βρείτε τον τύπο της

**234.** Να βρεθεί η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ και } f(-1) = 1.$$

**235.** Η κλίση της παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  στο τυχαίο σημείο  $M(x, f(x))$

είναι ίση με το διπλάσιο της τιμής της  $f$  στο  $x$ . Av  $f(0) = 1$ , να βρεθεί ο τύπος της  $f$ .

**236.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $(x-2)f'(x) = 2x^2 - 5x + 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Av  $f(3) = 7$ , να βρεθεί ο τύπος της  $f$ .

**237.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $f'(x) = -f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Av  $f(0) = 3$ , να βρεθεί ο τύπος της  $f$ .

**238.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0) = 2$ , για την οποία ισχύει:  $(f(x)-e^x)(f'(x)-e^x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . i) Να αποδείξετε ότι  $(f(x)-e^x)^2 = 1$ . ii) Να αποδείξετε ότι η  $h(x) = f(x)-e^x$  διατηρεί σταθερό θετικό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ . iii) Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

**239.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $f(x+\psi) \leq f(x)f(\psi) + x\psi$  για κάθε  $x, \psi \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 1$ . Να αποδείξετε ότι: i)  $f(x+h) - f(x) \leq f(x)(f(h) - 1) + xh$  ii)  $f'(x) = f(x) + x$

**240.** Να αποδείξετε ότι: i)  $f'(x) = -f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αν και μόνο αν υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε  $f(x) = ce^{-x}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ii) αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύουν  $g'(x) = -g(x)$  και  $h'(x) = -h(x)$  και η  $h$  δεν είναι μηδενική συνάρτηση, τότε υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε  $g = ch$ .

**241.** Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα  $P(x)$  για τα οποία ισχύει  $P(x) + P(\psi) = P(x+\psi) - x\psi - 1$  για κάθε  $x, \psi \in \mathbb{R}$  και  $P'(0) = -1$ .

**242.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ , όταν για κάθε  $x \in \Delta$  είναι:  $(f(x))^2 \cdot (f'(x)) = 3x^8$ ,  $f(0) = 0$  και  $\Delta = \mathbb{R}$  i)  $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$ ,  $f(0) = 0$  και  $\Delta = \mathbb{R}$  ii)  $\sin^2 x \cdot f'(x) + (f(x))^2 = 0$ ,  $f(x) \neq 0$ ,  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  και  $\Delta = (0, \frac{\pi}{2})$ .

**243.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν:  $f(x\psi) = f(x) \cdot f(\psi)$  για κάθε  $x, \psi > 0$ , ii)  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x > 0$ , iii)  $f'(1) = 2005$ . Να αποδειχθεί ότι: α) η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ , β) να βρείτε τον τύπο της  $f$

**244.** Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη έχει την ιδιότητα:  $f''(x) = f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 1$ .

Να αποδείξετε ότι: i)  $f(x) + f'(x) = 2e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . ii)  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- 245.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύουν  $f(0) = 1$ ,  $f'(0)=2$ ,  $f(x) > 0$  και  $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = e^x$  για κάθε  $x > 0$  αφού πρώτα δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f'(x)-f(x)}{e^x} - x$  είναι σταθερή.
- 246.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $f(x)f'(-x) = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν  $f(0) = 1$ , να αποδείξετε ότι:
- $f(-x)f'(x) = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
  - $f(-x)f(x) = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
  - $f(x) = e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**  
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**I. ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΗΣ  $f$**   
**ΑΠΟ ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΗΣ  $f'$**

- 247.** Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων: i)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  ii)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$   
 iii)  $f(x) = x^2 \ln x$  iv)  $f(x) = x \sqrt{9-x^2}$  v)  $f(x) = x^2(\ln x - \frac{3}{2}) - x(\ln x - 2) + 2$
- 248.** Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων:
- i)  $f(x) = \ln|x| + \frac{2}{x^2}$  ii)  $f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - 2\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$  iii)  $f(x) = \begin{cases} e^x - ex, & x \leq 0 \\ x^2 \ln x + 1, & x > 0 \end{cases}$   
 iv)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 1, & x \geq 1 \\ 1 + x^2 + x^3, & x < 1 \end{cases}$  v)  $f(x) = |x^2 - 7x|$ .
- 249.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$ . Να βρείτε  
 a) Τα  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  β) Τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ . Τι παρατηρείτε για την μονοτονία στα διαστήματα  $[0, 1)$  και  $(1, 2]$ ;
- 250.** Να βρείτε τις τιμές του  $a \in \mathbb{R}^*$  για τις οποίες η  $f(x) = ax^3 + 3x^2 + x + 1$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$
- 251.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 - 3(\lambda - 1)x^2 + 6(1 - \lambda)x + 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  Να βρεθούν οι

τιμές του λ, ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα.

**II. ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΗΣ  $f$  ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**

**252.** Να δειχθεί ότι η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$  είναι γνησίως φθίνουσα στο

**253.** Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$ . i) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης  $f$ . ii) να αποδείξετε ότι:  $e^{\pi} > \pi^e$  iii) να αποδείξετε ότι:  $e^x \geq x^e$ , για κάθε  $x > 0$  ανοικτό διάστημα  $(0, \frac{\pi}{2})$

**254.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(1+x)}, x > 0$  i) να μελετήσετε τη μονοτονία της  $f$  ii) να αποδείξετε ότι  $(1+\beta)^{\ln \alpha} < (1+\alpha)^{\ln \beta}$  όταν  $1 < \alpha < \beta$

**255.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}, x \in [2, +\infty)$  να μελετήσετε τη μονοτονία της  $f$  ii) να αποδείξετε ότι a)  $\ln(e-1)\ln(e+1) < 1$  β)  $\ln(e^{\pi}-1)\ln(e^{\pi}+1) < \pi^2$ .

**256.** i) Να αποδείξετε ότι  $x \ln x + 1 > x$  για κάθε  $x > 1$

ii) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης  $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

iii) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό  $\mu$  που ικανοποιεί τη σχέση  $(\mu+1)^2 \ln(\mu^2+5) = (\mu^2+4) \ln(\mu^2+2\mu+2)$ .

**II. ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΗΣ  $f$  ΜΕ ΧΡΗΣΗ Θ.Μ.Τ**

**257.** Αν η συνάρτηση  $f: R \rightarrow R$  είναι παραγωγίσιμη με  $f(0) = 0$  και η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x > 0$ , είναι γνησίως φθίνουσα.

**258.** Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, b]$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  και  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in (a, b)$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(a, b)$ .

- 259.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: R \rightarrow R$  με  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in R$ . Να αποδείξετε ότι αν  $a \in R$ , τότε ισχύει  $f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a)$  για κάθε  $x \in R$ .

### III. MONOTONIA THΣ f STO (α,β)

Και  $D_f = (a, x_0) \cup (x_0, b)$

- 260.** Άν  $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 4 \ln x + \frac{7}{2}$  τότε:

- a) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα
- b) Να λυθεί η εξίσωση  $f(x)=0$

- 261.** Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: R \rightarrow R$  τέτοια ώστε :

$2xf(x) + (x^2+1)f'(x) = e^x$  για κάθε  $x \in R$ , με  $f(0) = 1$  . a) Να αποδείξετε ότι

$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$  ,  $x \in R$  . β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  .

- 262.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, -1)$  και  $(0, +\infty)$ .

### IV. ΧΡΗΣΗ f'' ΓΙΑ THN MONOTONIA THΣ f

- 263.** Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης  $f(x) = \ln \frac{1+e^x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2}$  ,  $x \leq 0$

- 264.** Άν η συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[0, +\infty)$  ,

με  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$g(x) = \frac{f(x)}{2x}$  γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

### V. ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ- ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ THΣ f

- 265.** a) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$  είναι γνησίως αύξουσα σε

κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$

γ) Να λυθεί η εξίσωση  $x^3 - ax^2 - 9x + a = 0$ , για κάθε  $a \in \mathbb{R}$

**266.** Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ .

- i) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .
- ii) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τέσσερις ακριβώς πραγματικές ρίζες, δύο αρνητικές και δύο θετικές.

**267.** Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5a^2$ .

- i) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .
- ii) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 0$  όταν το  $a$  διατρέχει το  $\mathbb{R}$ .

**268.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης  $x^3 - ax^2 - 9x + a = 0$  όταν το  $a \in \mathbb{R}$

**269.** Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = 8x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

- i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- ii) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης  $8x^2\sqrt{x} - a\sqrt{x} + 1 = 0$  όταν το  $a$  διατρέχει το  $\mathbb{R}$ .

**270.** Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = x^2 - 2 - (1-x)(\ln x - 2)$ .

- i) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .
- ii) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .
- iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- iv) Να αποδείξετε ότι:  $(1-x)(\ln x - 2) \leq x^2 - 1$  για κάθε  $x > 0$ .

**271.** Οταν η παράμετρος  $a$  διατρέχει το σύνολο  $\mathbb{R}$  να βρεθεί το πλήθος' πραγματικών ριζών των εξισώσεων: i)  $2x^3 - 15x^2 + 24x - a = 0$  II)  $3x^4 - 4ax^3 + a = 0$

## VI. ΥΠΑΡΞΗ-ΕΥΡΕΣΗ ΛΥΣΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

**272.** Να λυθούν οι εξισώσεις a)  $2^x + 3^x + 4^x = 9^x$  β)  $e^x = 1 + \ln(x+1)$

**273.** Να λύσετε τις εξισώσεις: i)  $\ln x - x + 1 = 0$  ii)  $xe^x + 1 = e^x$  iii)  $x^2 + x + \ln x = 0$

**274.** Να λύσετε την εξίσωση  $\sin x + \ln(\varepsilon \varphi \frac{x}{2}) = \sin x \ln(\eta \mu x)$   $x \in (0, \pi)$ .

**275.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x \ln x = 1$  έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $[1, e]$ .

**276.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[1, e]$  με  $0 < f(x) < 1$  και  $f'(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [1, e]$ , να αποδειχθεί ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός  $x_0 \in (1, e)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$ .

**277.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = e^x - 1$  και  $g(x) = x - x^2$  έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

**278.** Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ . Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι  $1 - 1$ .

- a) Να δείξετε ότι η  $g$  είναι  $1 - 1$ .
- β) Να δείξετε ότι η εξίσωση :  $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$  έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζη

#### V. ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΗΣ $f$

**279.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[0, 1]$  με  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, 1)$  και  $f(0) = f(1) = 0$ , να αποδείξετε ότι είναι  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in (0, 1)$ .

**280.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 1$

- a) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α της  $f$ , η  $f'(x)$  και η  $f''(x)$
- β) Να μελετηθεί η  $f$  ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το πρόσημο της  $f$
- γ) Να λυθεί η εξίσωση  $2 \ln x = \frac{x^2 - 1}{x}$

**281.** Αν  $f, g$  παραγωγίσιμες για κάθε  $x \in (1, +\infty)$  και συνεχείς στο  $[1, +\infty)$ , ακόμη  $xf'(x) - f(x) - x^2 g'(x) > 0$ . Να αποδειχθεί ότι  $f(x) > xg(x)$  για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ .

**282.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύουν: η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[a, b]$   $f'(a) > 0$  και  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in [a, b]$ . Να αποδειχθεί ότι:  $f(a) > f(b)$ .

#### VI. ΑΠΟΔΕΙΞΗ-ΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ

**283.** Να αποδειχθούν οι ανισότητες

α)  $x \ln x \geq x - 1$ , για κάθε  $x > 0$       β)  $e^x - x > 1 - \frac{x^2}{2}$ , για κάθε  $x > 0$

γ) i)  $\eta \ln x < 2x$ ,  $x > 0$       ii)  $\eta \ln x > x - \frac{x^3}{3}$ ,  $x > 0$

δ) Αν  $0 < x \neq 1$ , να αποδειχθεί ότι  $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$

**284.** Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- a) Να λυθεί η ανίσωση  $g(x^2 - 2x) > g(x - 2)$
- β) Να λυθεί η ανίσωση  $a^{x^2 - 2x} - a^{x-2} \leq -x^2 + 3x - 2$ ,  $a < 1$

Πότε ισχύει το ίσον;

**285.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2 - (1-x)(\ln x - 2)$

- a) Να μελετηθεί η  $f$  ως προς την μονοτονία
- β) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $x^2 - 2 = (1-x)(\ln x - 2)$
- γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της  $f$
- δ) Να αποδειχθεί ότι  $(1-x)(\ln x - 2) \leq x^2 - 1$ , για κάθε  $x > 0$

**286.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt[n]{x} - \sqrt[n+2]{x+2}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*, n > 2$

- i) να μελετήσετε τη μονοτονία της  $f$
- ii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $\sqrt[n]{n} + \sqrt[n+4]{n+4}, 2\sqrt[n+2]{n+2}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*, n > 2$ .

**287.** i) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης:  $f(x) = a^x - x$ ,  $0 < a < 1$   
 ii) Αν  $0 < a < 1$  να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  που ικανοποιούν τη σχέση:

$$a^{\lambda^2 - 4} - a^{\lambda - 2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2)$$

**288.** i) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης

$$f(x) = (\alpha + x)e^{\frac{\alpha+x}{2}} - \alpha e^\alpha - x e^\alpha, x \in [\alpha, \beta] \text{ με } \alpha > 0$$

ii) Αν  $0 < \alpha < \beta$ , να αποδειχθεί ότι  $(\alpha + \beta)e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} < \alpha e^\alpha + \beta e^\beta$ .

**289.** i) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ , με  $x > 0$

ii) Να βρεθεί ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς  $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}$  (όπου  $n \in \mathbb{N}$  με  $n \geq 2$ ).

**290.** i) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης:  $f(x) = (x+1)\ln(x+1)x - x$ ,  $x \geq 0$

ii) Αν  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  και ισχύει  $e^\beta(\alpha+1)^{\alpha+1} = e^\alpha(\beta+1)^{\beta+1}$ , να αποδειχθεί ότι  $\alpha = \beta$ .

**291.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \ln \frac{x+\alpha}{2} - \frac{\alpha \ln \alpha}{x+\alpha} - \frac{x \ln x}{x+\alpha}$ ,  $x \geq \alpha > 0$

i) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης  $f$ .

ii) Αν  $\beta > \alpha$ , να αποδειχθεί ότι:  $\ln \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \ln \alpha + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \ln \beta$ .

**292.** Έστω η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$ .  
 Αν η συνάρτηση  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(a, \beta)$ , να αποδείξετε ότι για κάθε

$$x \in (a, \beta) \text{ ισχύει: } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} \text{ αύξουσα στο } (0, +\infty).$$

**293.** Έστω συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[a, \beta]$  και  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ . Αν η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[a, \beta]$  και υπάρχει  $\gamma \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε να ισχύει  $f(\gamma) = 0$  να αποδείξετε ότι είναι:  $\gamma + \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} < \beta < \gamma + \frac{f(\beta)}{f'(\alpha)}$ .

**294.** Άν  $f, g$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}$ , με  $f(1)=g(1)$

- a) Άν  $f'(x) > g'(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δειχθεί ότι  $f(x) < g(x)$  στο  $(-\infty, 1)$  και  $f(x) > g(x)$  στο  $(1, +\infty)$
- b) Άν  $f'(x)g'(x) < 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x) = g(x)$  έχει μοναδική ρίζα στο  $\mathbb{R}$

### ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

#### I. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

**295.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a\sqrt{x} + \frac{\beta \ln x}{\sqrt{x}}$ ,  $x > 0$ .

- i) Να προσδιοριστούν οι  $a$  και  $\beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η  $f$  να έχει στη θέση  $x_0=1$  τοπικό ακρότατο με τιμή  $-2$ .
- ii) Για  $a = -2$  και  $\beta = 1$ , να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

**296.** Να προσδιοριστούν οι  $a$  και  $\beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f(x) = alnx + \beta x^2 - 20x + 1$  να έχει στη θέση  $x_0=1$  τοπικό ακρότατο με τιμή  $6$

**297.** Να προσδιοριστούν οι  $a$  και  $\beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f(x) = aln2x + \frac{\beta}{x} + a$  να έχει στη θέση  $x_0=1$  τοπικό ακρότατο με τιμή  $2+ln2$ .

#### II. ΑΝΙΣΟΙΣΟΤΗΤΑ $\xrightarrow{\text{FERMAT}}$ ΣΟΤΗΤΑ

**298.** Άν  $0 < \alpha \neq 1$  και για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $x^\alpha \geq \alpha^x$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha = e$ , με δεδομένο ότι για κάποιο  $x_0 > 0$  ισχύει η ισότης.

- 299.** Αν για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $\ln x + \frac{\alpha}{x} \geq a$ , να βρείτε το a
- 300.** Αν  $a, b > 0$  και ισχύει  $a^{\frac{\ln x}{x}} + b^{\frac{x-1}{x}} \leq 2$  για κάθε  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι  $ab=1$ .
- 301.** Εστω μια συνάρτηση  $f: R \rightarrow R$  η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:  $(1+e^{1-x})f(x) + \text{συνπ}x \geq 3$  για κάθε  $x \in R$ . Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(1,2)$ .
- 302.** Εστω οι συναρτήσεις  $f, g: R \rightarrow R$  οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν:  $f(x) \geq x+1$  και  $f(x)e^{g(x)} = e^x - x$  για κάθε  $x \in R$ . Αν η  $C_f$  διέρχεται από το σημείο  $A(0,1)$ , να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των  $C_f$  και  $C_g$  στο  $x_0=0$ , τέμνονται κάθετα.
- 303.** Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο 1,  $A(1,2) \in C_f$ , και  $f(x) \leq x^2+x$  για κάθε  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι  $f'(1) = 3$

**ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ****ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

- 304.** Η παράγωγος μιας συνάρτησης  $f$  είναι  $f'(x) = -2(x+1)^3(x-1)^2(x-2)$ ,  $x \in R$ . Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x \in R$  η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και για ποιες τοπικό ελάχιστο.
- 305.** Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:
- i)  $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$       ii)  $f(x) = x^4 \ln x$       iii)  $f(x) = x^{x^{\ln x}}$       iv)  $f(x) = \frac{e^x}{2x}$
- 306.** Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:
- i)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 2 \\ \ln(x-1), & x > 2 \end{cases}$       ii)  $f(x) = \begin{cases} 1-e^{x-1}, & x \geq 1 \\ \ln(1-x), & x < 1 \end{cases}$       iii)  $f(x) = |x^2 - x - 2|$ ,  $x \in R$
- iv)  $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30, & x < 1 \\ x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 48x - 20, & x \geq 1 \end{cases}$       v)  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 6, & x \leq 3 \\ 2x^3 - 15x^2 + 24x + 6, & x > 3 \end{cases}$
- 307.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^2(x+\alpha)^2(x-\beta)^2$  με  $\alpha, \beta > 0$  έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.
- 308.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^\kappa(x-1)^\nu$  έχει ένα τουλάχιστον τοπικό ελάχιστο, όπου  $\kappa, \nu \in N$  με  $\kappa, \nu \geq 2$ .
- 309.** Για ποια τιμή της θετικής σταθεράς  $\alpha$  η μέγιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x) = x^\alpha e^{2\alpha-x}$ ,  $x > 0$ , γίνεται ελάχιστη;
- 310.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \lambda x^2 - 2(\ln \lambda)x + 1$ ,  $\lambda \geq 1$ .  
Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε η ελάχιστη τιμή της  $f$  να γίνεται ελάχιστη.
- 311.** Για ποια τιμή της θετικής σταθεράς  $\alpha$  η μέγιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x^{2\alpha} e^{4\alpha} + e^x}{e^x}$ ,  $x > 0$ , γίνεται ελάχιστη;

- 312.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - \lambda x - 1$ ,  $\lambda > 0$ . Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε η ελάχιστη τιμή της  $f$  να γίνεται μέγιστη. Για την παραπάνω τιμή που βρήκατε του  $\lambda$  να δείξετε ότι η ευθεία  $\psi = \lambda x + 1$  εφάπτεται στη  $C_g$  όπου  $g(x) = e^x$ .
- 313.** Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του  $a \in \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $3x^4 - 4x^3 + a \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- 314.** Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του  $k \in \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $e^x \geq kx^2$  για κάθε  $x > 0$ .
- 315.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x - \lambda x$ ,  $\lambda > 0$ . Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ . Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του  $\lambda > 0$  για την οποία ισχύει:  $\ln x \leq \lambda x$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ . Για την παραπάνω τιμή που βρήκατε του  $\lambda$  να δείξετε ότι η ευθεία  $\psi = \lambda x$  εφάπτεται στη  $C_g$  όπου  $g(x) = \ln x$ .
- 316.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{e^x} + 1 - \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ . Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του  $\lambda$  για την οποία ισχύει  $f(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν  $\lambda \geq \frac{1}{e} + 1$  να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = (1-\lambda)x - \frac{x+1}{e^x}$  είναι γνησίως φθίνουσα.
- 317.** Έστω μια συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:  $\ln f(x) + e^{f(x)} = 2x \ln x - 3x + 2\sqrt{e} + e$  για κάθε  $x > 0$ . Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- 318.** Έστω μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν η  $f'$  είναι συνεχής να λύσετε την εξίσωση:  $f(\sin x) - f(2-x^2) = 0$ .
- 319.** Έστω η συνάρτηση  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν για κάθε  $x \in [0, 2]$ ,  $f(x) = f(2-x)$  και  $f''(x) \neq 0$ . Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .
- 320.** Αν η  $f'$  είναι συνεχής στο  $[0, 2]$  και  $f(0) > f(1)$  να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- 321.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x \ln^2 x$ . Να βρείτε το σημείο της  $C_f$  στο οποίο η  $f$  έχει τη μικρότερη κλίση
- 322.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $g(x) = \ln x$ ,  $x > 0$ .
  - i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους δεν τέμνονται.
  - ii) Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση την οποία μπορεί να έχει ένα σημείο της  $C_f$  από την ευθεία  $y = x$ .
  - iii) Να βρείτε το σημείο της  $y = e^x$ , το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από την  $y = x$ .
  - iv) Ποια νομίζετε ότι είναι τα σημεία των  $C_f$  και  $C_g$  που να απέχουν την ελάχιστη απόσταση;
- 323.** Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  με  $\beta \neq 0$ . Να αποδειχθεί ότι:
- $$\beta^2 e^{\frac{\alpha}{\beta}} + \alpha^2 \geq \alpha\beta + \beta^2.$$

**324.** Να αποδειχθεί ότι  $\ln a^a + e^{b-1} \geq ab$ ,  $a > 0$

**325.** Να αποδειχθεί ότι:  $\frac{\ln \beta}{\beta} < \frac{\ln \alpha}{\beta} + \frac{1}{\alpha}$  όταν  $0 < a < \beta$ .

**326.** Άν  $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$  να αποδειχθεί ότι:  $\frac{\varepsilon \phi \alpha}{\varepsilon \phi \beta} < \frac{\beta}{\alpha}$

### ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**327.** Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο  $t$ , σύμφωνα με τη συνάρτηση  $f(t) = \frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}$ ,  $t \geq 0$  όπου  $A > 0$ . Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους  $K(t)$  από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από τη συνάρτηση  $K'(t) = \frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}$ ,  $t \geq 0$  και υποθέτουμε ότι  $K(0) = 0$ .

Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία πρέπει να πωληθεί η μηχανή, έτσι ώστε το συνολικό κέρδος  $P(t)$  από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο κέρδος.

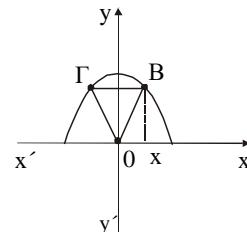
**328.** Στο σχήμα φαίνεται τμήμα παραβολής με εξίσωση  $y = \frac{1}{14}(48 - x^2)$ , και το ισοσκελές

τρίγωνο  $OBG$  με  $OB = OG$ .

i) Να βρείτε τα σημεία  $B$ ,  $G$  για τα οποία το

ii) εμβαδόν του τριγώνου  $OBG$  γίνεται μέγιστο.

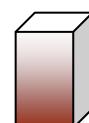
iii) Ποιο είναι αυτό το μέγιστο εμβαδόν;



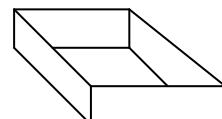
**329.** Βρείτε δυο αριθμούς με άθροισμα 8 και ελάχιστο άθροισμα κύβων.

**330.** Να διαιρεθεί ο αριθμός 8 σε δύο μέρη ώστε το γινόμενο των δύο μερών επί την διαφορά τους να γίνεται μέγιστο.

**331.** Ο όγκος του κουτιού είναι  $72m^3$  και η πρόσθια πλευρά του έχει λόγο διαστάσεων 1 προς 2. Βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού ώστε να έχει την ελάχιστη επιφάνεια.

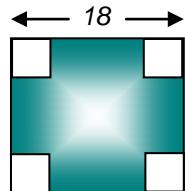


**332.** Από ένα ορθογώνιο χαρτόνι 18 επί 18 cm<sup>2</sup> κόβουμε 4 μικρά τετράγωνα με πλευρά  $x$  cm το καθένα και



φτιάχνουμε το διπλανό κουτί χωρίς οροφή.

Να βρείτε το  $x$  ώστε ο όγκος του κουτιού να είναι  
ο μέγιστος δυνατός.



**333.** Μια βιομηχανία παράγει  $x$  ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από τη συνάρτηση  $K(x) = \frac{\alpha}{4}x^3$  όπου  $x > 0$  και η παράμετρος  $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$ .

Τα έσοδα από την πώληση  $x$  ποσότητας του προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση  $E(x) = x^2$ ,  $x > 0$  και το κέρδος δίνεται από τη συνάρτηση  $f(x) = E(x) - K(x)$ ,  $x > 0$ .

Να βρείτε την ποσότητα  $x_0$  για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος,  
το οποίο συμβολίζουμε  $M(a)$ . Να βρείτε την τιμή του  $a \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$  για την οποία το  $M(a)$  γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο αυτό

**334.** Δίνονται τα σημεία  $A(4,0)$ ,  $B(-4,0)$  και η ευθεία  $(\varepsilon): 4x+5y-2$

- i) Να βρεθεί σημείο  $M$  της  $(\varepsilon)$   $(MA)+(MB)=\min$
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση έλλειψης με εστίες τα  $A, B$  που εφάπτεται της  $(\varepsilon)$

**335.** Έστω  $x$  ο αριθμός τεμαχίων ενός προϊόντος. Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής

μονάδος είναι  $\frac{dP}{dx} = \frac{3}{176}(54x - 8x^2)$ , ενώ το κόστος των  $x$  τεμαχίων με  $x < 7$

είναι  $K(x) = x^3 - 18x^2 + 105x$  ( $x$  σε εκατομμύρια)

- i) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί την τιμή μονάδος
- ii) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί το κόστος
- iii) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί τις πωλήσεις
- iv) Να βρεθεί ότι ο αριθμός τεμαχίων που ελαχιστοποιεί τα κέρδη

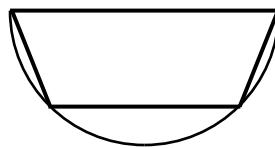
**336.** Ένα βιβλιοπωλείο αγοράζει ένα βιβλίο από τον εκδότη 3 ευρώ το καθένα .

Όταν το διαθέτει στην αγορά με 15 ευρώ τότε πουλά 200 αντίτυπα τον μήνα. Εκτιμήθηκε τώρα ότι αν η τιμή πώλησης μειωθεί, τότε για κάθε 1 ευρώ μείωσης θα πωλούνται 20 περισσότερα αντίτυπα τον μήνα.

Να βρείτε την τιμή πώλησης που μεγιστοποιεί τα κέρδη.

- 337.** Σε δοσμένο ημικύκλιο διαμέτρου  $2R$  να εγγραφεί τραπέζιο

Όπως στο σχήμα με μέγιστο εμβαδό



- 338.** Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί τη συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώσουν συμμετοχή ακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 1000 ευρώ το άτομο. Για κάθε επί πλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 5 ευρώ. Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή

**ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ -ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ  
ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**I. ΜΕΛΕΤΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ**

- 339.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη όταν:

$$\begin{array}{lll} \text{i) } f(x) = x \ln \frac{1}{x} & \text{ii) } f(x) = x e^{\frac{1}{x}} & \text{iii) } f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} \\ \text{iv) } f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12} - 3x + 1 & \text{v) } f(x) = x^x & \text{vi) } f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3}{4} x^2, \quad x > 0 \end{array}$$

- 340.** Έστω μια συνάρτηση  $f : R \rightarrow R$  για την οποία ισχύει  $f'(x) < \frac{f''(x) + f(x)}{2}$   $\forall x \in R$ . Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x)e^{-x}$  είναι κυρτή στο  $R$ .

- 341.** Η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $R$  και η συνάρτηση  $g$  κοίλη στο  $R$ . Να αποδείξετε ότι: Οι  $C_f, C_g$  έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία. Αν οι  $C_f$  και  $C_g$  έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάποιο κοινό σημείο τους, τότε οι  $C_f$  και  $C_g$  έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

- 342.** Έστω μια συνάρτηση  $f : R \rightarrow R$  για την οποία ισχύει  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in R$ , και η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $R$ . Αν  $g(x) = \ln f(x)$  και  $g''(x) > 0$  για κάθε  $x \in R$ , να δείξετε ότι η συνάρτηση  $h(x) = e^{\lambda x} f(x)$  είναι κυρτή στο  $R$  για κάθε  $\lambda \in R$ .

- 343.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow R$  για την οποία ισχύουν  $f(x) < x$  και  $f'(x) = \frac{x}{x - f(x)}$  για κάθε  $x > 0$ . Να δείξετε ότι: Η  $f$  είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη  $H$   $f$  είναι κυρτή στο  $(0, + \infty)$ .

- 344.** Να αποδειχθεί ότι: a) η συνάρτηση  $g(x) = x \ln x$  είναι κυρτή στο διάστημα  $(0, + \infty)$ .  
 β)  $\alpha^\alpha \beta^\beta > \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta}$  για κάθε  $0 < \alpha < \beta$ .

- 345.** i) Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  η οποία είναι κυρτή στο διάστημα  $\Delta$ .  
 Αν  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$  και  $\alpha < \beta < \gamma$  να δείξετε ότι:  $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$ .

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x \ln x$  είναι κυρτή.  
 iii) Αν  $0 < \alpha < \gamma$  και  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου,  
 να δείξετε ότι:  $\beta^\beta < \sqrt{\alpha^\alpha \gamma^\gamma}$ .

- 346.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα  $\Delta$  και κυρτή στο  $\Delta$ .  
 Αν  $\alpha, \beta \in \Delta$  με  $\alpha < \beta$ , να αποδειχθεί ότι:  $f(\alpha)+f(\beta) > 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ .

- 347.** Αν  $\alpha, \beta \in A_f$ , να δείξετε ότι  $\ln \frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\ln \alpha \cdot \ln \beta}$ .

- 348.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $\Delta = (\alpha, \beta)$  και  $x_0 \in \Delta$  με  $f''(x_0) = 0$  και  $f^{(3)}(x) < 0$  για κάθε  $x \in \Delta - \{x_0\}$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο διάστημα  $(\alpha, x_0]$  και κοίλη στο διάστημα  $[x_0, \beta)$ .

- 349.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $R$ , να αποδείξετε ότι αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, τότε αυτό είναι και ολικό ελάχιστο της  $f$ .

- 350.** Οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο  $R$  με  $f'(x) > 0$  και  $g''(x) > 0$  για κάθε  $x \in R$ . Αν η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h = f \circ g$  είναι κυρτή στο  $R$ .

- 351.** Αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $(\alpha, \beta)$  να αποδείξετε ότι αν η  $f$  εναί περιπτη, τότε η  $f$  είναι κοιλη στο  $(-\beta, -\alpha)$

- 352.** Αν η  $f$  είναι κυρτη στο  $R$ , να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \neq 0$  ισχυει  $f(\lambda x) - f(0) > \lambda f(x) - \lambda f(0)$  αν  $\lambda > 1$  και  $f(\lambda x) - f(0) < \lambda f(x) - \lambda f(0)$  αν  $\lambda < 1$

## II. ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

- 353.** i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f(x) = \ln x - x$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.  
 ii) Να δείξετε ότι συνάρτηση  $g(x) = \ln 2x + 2x \ln x + x^2 - 3$  είναι κυρτή στο  $(0, + \infty)$ .  
 iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_g$  στο  $x_0 = 1$ .

**iv)** Να δείξετε ότι:  $x + \ln x \sqrt{4x - 3}$  για κάθε  $x > 1$ .

**354.** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση με  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2x}{x - 2} = 3$  και  $f(3) = 4$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $x_0 = 2$ . Αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$  να δείξετε ότι  $f(x) - 5x + 6 \geq 0$ . Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\zeta \in (2, 3)$  στο οποίο η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο.

**355.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ . a) Να βρείτε:

i) τα διαστήματα που η  $f$  είναι κοίλη ή κυρτή και τα σημεία καμπής

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο καμπής

β) Να δειχθεί ότι  $\sqrt{x} \ln x \leq x - 1$ , για κάθε  $x \in [1, +\infty)$

**356.** a) Να δείξετε ότι  $e^x > 2x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

β) Έστω η  $f(x) = e^x - \frac{x^3}{3} - 1$  i) Να δείξετε ότι είναι κυρτή

ii) Να δείξετε ότι  $e^x > \frac{x^3}{3} + x + 1$ , για κάθε  $x$

### III. ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

**357.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της  $C_f$ , όταν:

i)  $f(x) = \sqrt{x} \ln \sqrt{x}$  ii)  $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{6}$  iii)  $f(x) = 2 \sin x + \frac{x^2}{2}$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

iv)  $f(x) = x e^{-x^2}$  v)  $f(x) = x^2 \ln x$  vi)  $f(x) = \ln(\ln x)$  vii)  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

viii)  $f(x) = x^4 - 6x \ln x^2 - 12$  ix)  $f(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - 3e^x + 2$  x)  $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$

**358.** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με  $f''(x) + 4f(x) = 4x$

Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν). Αν  $g(x) = 2x = f(x)$  να μελετήσετε την  $g$  ως προς τη μονοτονία.

Να λύσετε την ανίσωση  $f(x^2 - x - 2) + 2x < 2x^2$ .

**359.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2 \ln x$ . Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής. Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ . (ΙΟΥΝΙΟΣ 2004)

**360.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $[a, b]$  που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο  $(a, b)$ . Αν ισχύει  $f(a) = f(b) = 0$  και υπάρχουν

αριθμοί  $\gamma \in (\alpha, \beta)$ ,  $\delta \in (\alpha, \beta)$ , έτσι ώστε  $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ , να αποδείξετε ότι:

α). Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ .

β). Υπάρχουν σημεία  $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$  τέτοια ώστε  $f'(\xi_1) < 0$  και  $f'(\xi_2) > 0$ .

γ). Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ . (ΙΟΥΝΙΟΣ 2003).

- 361.** Έστω  $f$  μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $R$  με  $f'' \downarrow$  στο  $R$ ,  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in R$ ,  $f'(1) > 0$  και η συνάρτηση  $g(x) = f(x) - f(2-x)$ , για κάθε  $x \in R$ .  
I) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $g$ . II) Να βρείτε τα διαστήματα που η  $g$  είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της  $C_g$ .

- 362.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta \ln x + \beta x$ .

Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in R$ , ώστε το  $A(1, 3)$  να είναι σημείο καμπής της  $C_f$ .

Για  $\alpha = 4$  και  $\beta = -1$ : Να βρείτε τα διαστήματα που η  $C_f$  είναι κυρτή ή κοίλη.

Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο καμπής της

Να δείξετε ότι  $4\sqrt{x} - \ln x \leq x + 3$  για κάθε  $x \geq 1$ .

- 363.** Να αποδείξετε ότι αν η συναρτηση  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + x + 1$  εχει σημεία καμπής ισχυει  $3a^2 > 8b$

- 364.** Για την παραγωγίσιμη στο  $R$  συνάρτηση  $f$ , να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν η  $f$  να έχει στο  $x_0$  τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής.

- 365.** Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  της συνάρτησης :  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  με  $a \neq 0$  και  $b^2 = 3ac$  δέχεται στο σημείο καμπής της οριζόντια εφαπτομένη.

- 366.** Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  της συνάρτησης :  $f(x) = 2x^4 + 4ax^3 + 3(2a^2 - 4a + 5)x^2 + ax + 1$ ,  $a \in R$  δεν έχει σημεία καμπής

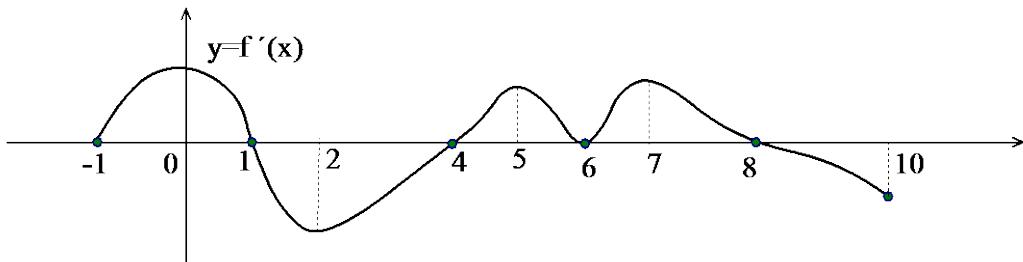
- 367.** Έστω  $g$  μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $R$  για την οποία ισχύει  $(g(x))^2 = 5g(x) - e^x - a^x + 2005$  για κάθε  $x \in R$  και  $1 \neq a > 0$ . Να αποδείξετε ότι η  $C_g$  δεν έχει σημεία καμπής.

- 368.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ . Αν  $x_1, x_2$  και  $x_3$  είναι αντίστοιχα οι θέσεις στις οποίες η  $f$  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και η  $C_f$  σημείο καμπής, να αποδείξετε ότι τα αντίστοιχα σημεία της  $C_f$  είναι συνευθειακά.

- 369.** Έστω  $f$  μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  για την οποία ισχύει:  $[f(x)]^2 = 2x(x-2)$ ,  $x \in (\alpha, \beta)$ . Να δείξετε ότι η  $f$  δεν έχει σημείο καμπής

- 370.** Μια συνάρτηση  $f$  είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο  $I\mathbb{R}$  και για κάθε  $X \in R$  ισχύει  $f'(x) + [f'(x)]^{2000} = \sin^2 x - 3x + e^{-x}$  Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  δεν έχει σημεία καμπής.

- 371.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[-1, 10]$



- a) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων και των σημείων καμπής
- β) Να κάνετε μία πρόχειρη γραφική παράσταση της  $f$

### ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

#### I. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ

- 372.** Να βρειτε τις κατακορυφες ασυμπτωτες της  $C_f$  όταν

i)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{3-x}}$

ii)  $f(x) = \ln(4-x^2)$

iii)  $f(x) = \ln \frac{x^2}{|x^2-1|}$

iv)  $f(x) = x \cdot \eta \mu \frac{2}{x}$

v)  $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2}$

vi)  $f(x) = x-1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$

vii)  $f(x) = \sqrt{4x^2+x} + 2x$

viii)  $f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x^2+2}}{x-4}$

ix)  $f(x) = \frac{\eta \mu 2x}{x}$

x)  $f(x) = \frac{x^4-3x}{x^2-4}$

xi)  $f(x) = \frac{x^3-2x+6}{x^2-9}$

xii)  $f(x) = \frac{1+3 \ln x}{x}$

xiii)  $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)e^x}$

xiv)  $f(x) = \frac{x \ln(x-1)}{x^2-4}$

#### II. ΠΛΑΓΙΕΣ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ

- 373.** Να βρεθούν οι πλαγιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i)  $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-1}$       ii)  $f(x) = \frac{x^2+3x-5}{x+1}$       iii)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-2}$

iv)  $f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$       v)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$       vi)  $f(x) = x e^{\frac{1}{x^2}}$ .

**374.** Να βρείτε τις ασυμπτωτες της  $C_f$  όταν **i)**  $f(x) = xe^x$     **ii)**  $f(x) = x \ln x^2$

**375.** Να προσδιοριστε τα  $\alpha, \beta$  ώστε η ευθεία  $\psi = 3x + \beta$  να είναι ασυμπτωτη της γραφικης παραστασης της συναρτησης  $f(x) = \frac{(\alpha+2)x^2 - 3\alpha x + 4}{2x-1}$

**376.** Να βρείτε για ποιες τιμες του  $\alpha \in \mathbb{R}$  η ευθεία  $x=1$  είναι ασυμπτωτη της γραφικης παραστασης της συναρτησης  $f(x) = \frac{x^2 + x + \alpha - 1}{x - \alpha^4}$

**377.** Αν η συναρτηση  $f(x) = \frac{\alpha x + 1}{x - \beta}$  εχει ασυμπτωτες τις ευθειες  $x = -1$  και  $\psi = 3$  δειξτε ότι  $\alpha = 3$  και  $\beta = -1$

### III. ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ

**378.** Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε να είναι:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 4x + 3} - (\alpha x + \beta)) = 0 \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2xe^{-\frac{1}{x}} - \alpha x + 2\beta) = 0 \quad \text{iii)} \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \frac{1}{x} - \alpha x - \beta) = 2$$

**379.** Αν η ευθεία  $\psi = 3x + 4$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  στο  $+\infty$ , να βρεθούν οι τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$ , ώστε:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu f(x) + 6x}{x f(x) - 3x^2 + 5x + 2} = 1$ .

**380.** Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει στο  $+\infty$  ασύμπτωτη την ευθεία  $\psi = x + 2$ , να βρείτε τον  $\mu \in \mathbb{R}$ , ώστε:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1} f(x) + 3\mu x^2 + 4}{x^2 f(x) + \sqrt{x^4 + 1} - x^3 + 2} = 10$ .

**381.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $f(x) - g(x) = x - 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν η ευθεία  $\psi = 3x - 7$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\psi = 2x - 3$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  στο  $+\infty$ .

**382.** Έστω οι συναρτήσεις  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $g'(x) = f'(x) - 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και οι  $C_f$  και  $C_g$  τέμνονται πάνω στην ευθεία  $x = 1$ . Αν η  $C_f$  έχει ασύμπτωτη στο  $+\infty$  τον άξονα  $x'$ , να βρείτε στο  $+\infty$  την ασύμπτωτη της  $C_g$

**383.** Έστω μια συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $e^{-x} \leq xf(x) \leq 1$  για κάθε  $x > 0$ . Να δείξετε ότι ο άξονας  $x'$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$ .

**384.** Έστω μια συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f''(x) = \frac{2}{x^3}$  για κάθε  $x > 0$ . Αν η ευθεία  $\psi = x - 1$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  να βρείτε την  $f$ .

**385.** Δινεται η συνεχης συναρτηση  $f:R \rightarrow R$  με  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ . Av  $g(x) = f(x) - 2x + 1$ , να βρειτε τις ασυμπτωτες της γραφικης παραστασης της g.

**386.** Για μια συναρτηση  $f$  ισχυει  $2x+3 \leq f(x) \leq \frac{2x^3+3x^2+1}{x^2}$ , για καθε  $x \neq 0$ . Na βρεθουν οι πλαγιες ασυμπτωτες της  $C_f$

**387.** Η συναρτηση  $f:R \rightarrow R$  ικανοποιει τη οχεοη  $x+2 \geq x^2 f(x) \geq x+1$ , για καθε  $x \in R$ . Δειξτε ότι η γραφικης της παρασταση εχει μια τουλαχιστον κατακορυφη ασυμπτωτη.

**388.** Av η  $\psi = 2x-3$  είναι ασυμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}f(x)+2mx^2+x+3}{x^2f(x)-2x^3+2x-1} = -4$  να βρειτε τον  $m \in R$

### ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**389.** Να μελετηθούν και παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις

$$\text{I)} \quad f(x) = \frac{x^2-x+4}{x-1}$$

$$\text{II)} \quad f(x) = x - \eta \mu x, \quad x \in [-2\pi, 2\pi]$$

**390.** Δινεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύδουσα, τα διαστήματα στα οποία f η είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

**Μονάδες 6**

**B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία f η είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**Μονάδες 9**

**B3..** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

**Μονάδες 7**

Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B1**, **B2**, **B3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)